



## **Università degli Studi di Trento**

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Meccanica

# Progetto del corso di Metodi Numerici per l'Ambiente

**Studente:** Pelagatti Gianluca

**Matricola:** 198365

**Gruppo di lavoro:** Di Tolla Pasquale  
Pizzini Angela  
Di Grumo Daniela  
Pelagatti Gianluca

**Anno accademico:** 2017-2018

**Docente:** Prof. Dr. Ing. Michael Dumbser

## Sommario

1. Introduzione	3
2. Problema alle ODE: four bodies with springs	3
2.1. Descrizione del problema ed assegnazione delle costanti	3
2.2. Scrittura del sistema delle ODE del secondo ordine che governa il moto delle quattro masse	4
2.3. Conversione del sistema di secondo ordine in un sistema lineare autonomo di primo ordine	5
2.4. Risoluzione del sistema di secondo ordine col metodo Euler esplicito e metodo Runge – Kutta di ordine 4 e confronto dei risultati con la soluzione esatta	5
2.4.1. Il metodo di Euler esplicito	5
2.4.2. Il metodo Runge – Kutta di IV ordine	6
2.4.3. Implementazione nel programma	7
2.5. Osservazioni e risultati finali	9
3. Esercizio sulle equazioni alle derivate parziali (PDE): 2D dambreak problem	14
3.1. Descrizione del problema ed assegnazione delle costanti	14
3.2. Impostazione del problema alle acque basse: shallow water problem	15
3.3. Risoluzione del problema monodimensionale semplificato con riflessione dell'onda sull'edificio	15
3.4. Metodo ai Volumi Finiti e metodo MUSCL per il problema bidimensionale	18
3.5. Risultati analitici e confronto dei metodi usati	20
3.6. Inserimento dell'edificio e confronto dei risultati	23

## 1. Introduzione

Il progetto ha la finalità di risolvere i due quesiti proposti:

- un sistema di equazioni alle derivate ordinate (ODE) che descriva il problema di quattro corpi collegati da molle ed azionato da velocità iniziali;
- una situazione di rottura di un serbatoio con fuoriuscita di acqua ed inondazione di un'area con un edificio.

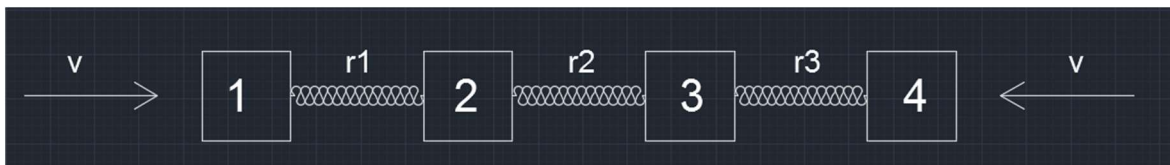
Lo studio di questi problemi si terrà tramite il software MatLab2017.

## 2. Problema alle ODE: four bodies with springs

### 2.1. Descrizione del problema ed assegnazione delle costanti

Il problema consiste nel valutare il comportamento di quattro corpi con massa diversa collegati da molle diverse e azionate da una velocità iniziale alle estremità.

Lo schema si presenta come segue in figura:



I dati noti del problema dipendono strettamente dalle sei costanti iniziali corrispondenti al numero di matricola 198365

$$c1=1; c2=9; c3=8; c4=3; c5=6; c6=5.$$

Per cui le masse dei corpi hanno i valori

$$M1 = 1+0.1*c1 = 1.1, \text{ in posizione } x = -1;$$

$$M2 = 2+0.1*c2 = 2.9, \text{ in posizione } x = 0;$$

$$M3 = 1+0.3*c3 = 3.4, \text{ in posizione } x = +1;$$

$$M4 = M1 = 1.1, \text{ in posizione } x = +2.$$

I coefficienti di rigidità delle tre molle sono valutati come

$$R1 = 1+0.1*c4 = 1.3;$$

$$R2 = 1+0.1*c5 = 1.6;$$

$$R3 = 1+0.1*c6 = 1.5.$$

Le velocità iniziali agenti sui corpi M1 e M4 valgono 1 e sono uguali e contrarie. Si pone  $L=1$  come la distanza tra un corpo e l'altro, considerando il centro del sistema di riferimento M2.

Non sono date delle unità di misura e delle grandezze reali nel problema, ma per meglio comprendere il fenomeno in analisi si pongono le masse in chili (Kg), le distanze in metri (m) e le costanti di rigidità in Newton al metro (N/m),

quindi le velocità in metri al secondo (m/s), concordi col sistema di riferimento internazionale (S.I.).

## 2.2. Scrittura del sistema delle ODE del secondo ordine che governa il moto delle quattro masse

Per risolvere il problema di corpi legati da molle è necessario fare un breve richiamo alle leggi fisiche in atto per meglio comprendere il fenomeno e valutarne la validità del risultato ottenuto. La prima forza in gioco è quella elastica, cioè una forza di contatto esercitata da corpi a seguito di una deformazione che li comprime o li dilata. Il valore sperimentale della forza si ottiene dalla legge di Hooke:  $\vec{F}_{elast} = -R \Delta x \hat{x}$ , cioè la deformazione è linearmente proporzionale alla forza agente secondo un coefficiente che dipende dalle caratteristiche della molla. Il segno negativo si impone conseguentemente dal fatto che all'aumentare della forza agente si ha un accorciamento del corpo, viceversa se la forza agente si riduce si ha un allungamento del corpo. Quindi il termine  $\Delta x$  indica la differenza di lunghezza (lungo la direzione  $\hat{x}$ ) del corpo a riposo e sollecitato; viene misurato in lunghezze, quindi in metri nel Sistema Internazionale. La forza elastica è calcolata in Newton, di conseguenza la costante di rigidità  $R$  ha dimensioni Newton su metri, infatti indica il rapporto tra la forza (N) e la deformazione (m). Il sistema è dinamico, quindi si presuppone la valutazione della seconda legge di Newton, in cui una forza agente è linearmente proporzionale all'accelerazione che un corpo assume essendo sollecitato, secondo una costante definita dalla massa del corpo stesso:  $\vec{F}_N = M\vec{a}$ . La presenza del termine accelerazione ( $m/s^2$ ) implica una differenza di velocità,  $\frac{dv}{dt} \neq 0$ , dovuta alla risposta delle molle man mano che si sviluppa il fenomeno.

Per descrivere la fisica del sistema ci si basa sull'uguaglianza delle forze di Newton e la legge di Hooke della forza elastica, conseguenti alla velocità imposta sui due corpi esterni. Pertanto si ottiene l'equazione generale

$$F_N = M\vec{a} = R_A(x_A + L - x_B) + R_B(x_C - x_B - L) = F_{elast}$$

La formula si specializza per ogni corpo per ottenere l'equilibrio delle masse e studiarne il comportamento in tramite la variazione della posizione lungo l'asse  $\hat{x}$  (orizzontale). Quindi si ottiene il sistema delle quattro equazioni:

$$\begin{cases} a_1 m_1 = r_1(x_2 - x_1 - 1) \\ a_2 m_2 = r_1(x_1 + 1 - x_2) + r_2(x_3 - x_2 - 1) \\ a_3 m_3 = r_2(x_2 + 1 - x_3) + r_3(x_4 - x_3 - 1) \\ a_4 m_4 = r_3(x_3 + 1 - x_4) \end{cases}$$

## 2.3. Conversione del sistema di secondo ordine in un sistema lineare autonomo di primo ordine

La conversione avviene nella forma

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{Z}) = \mathbf{AZ}, \text{ con } \mathbf{Z} = (x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, v_3, x_4, v_4, L)$$

Grazie all'analisi del fenomeno fisico si ottiene la matrice  $\mathbf{A}$  quadrata (9x9) capace di convertire il sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_1}{M_1} & 0 & \frac{R_1}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_1}{M_2} & 0 & -\frac{R_1 + R_2}{M_2} & 0 & \frac{R_2}{M_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1 - R_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{M_3} & 0 & -\frac{R_2 + R_3}{M_3} & 0 & \frac{R_3}{M_3} & 0 & \frac{R_2 - R_3}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_3}{M_4} & 0 & -\frac{R_3}{M_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_3}{M_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.4. Risoluzione del sistema di secondo ordine col metodo Euler esplicito e metodo Runge – Kutta di ordine 4 e confronto dei risultati con la soluzione esatta

### 2.4.1. Il metodo di Euler esplicito

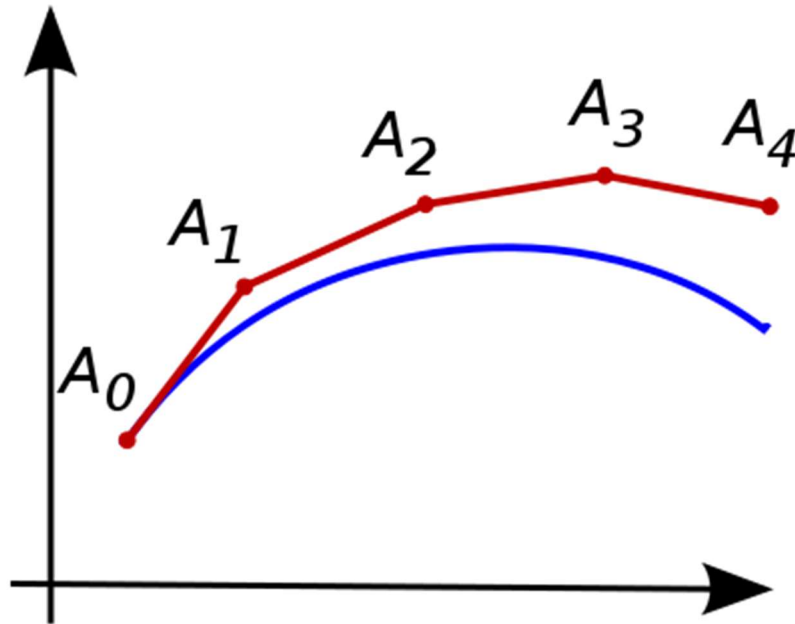
Il metodo di Euler rientra nell'insieme dei metodi ad un passo, seguendo la formula generica:

$$y_{n+1} = y_n + \beta (y_n, t_n, \Delta t, f), \text{ nello specifico la sua scrittura può essere}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$$

ed è definito *esplicito* perché presenta tutti termini noti nella sua formula.

È un metodo del primo ordine e la discretizzazione nel tempo è data da:  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Questo è il metodo più semplice ma non gode di buona precisione nei suoi risultati. Metodi derivanti sono più sofisticati ma più precisi, come quello di Euler modificato o quello di Heum, entrambi del secondo ordine.



Da [https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_di\\_Eulero](https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_di_Eulero)

Nell'illustrazione si confrontano i risultati della polinomiale d'approssimazione con la curva "sconosciuta" obiettivo del calcolo. È evidente che all'aumentare del tempo di avanzamento, posto sull'asse orizzontale, si ha un errore crescente.

È detto *consistente* perché l'errore locale di discretizzazione ( $\tau$ ) si annulla se il passo temporale tende allo zero. È anche definito *stabile* e *monotono* sotto una determinata condizione di  $\Delta t$  relativo al coefficiente angolare della funzione.

Il caso più esemplare è dato dall'analisi della funzione di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -a y \\ a > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

secondo cui si ha la soluzione esatta  $y(t) = y_0 e^{-at}$ ; vi si trova una condizione di stabilità relativa al tempo  $\Delta t \leq \frac{2}{a}$  e una condizione di monotonia  $\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \geq 0$ .

### 2.4.2. Il metodo Rounge – Kutta di IV ordine

Il metodo Rounge – Kutta rientra anch'esso tra i metodi ad un passo, ma è caratterizzato dalla successione di stages (o sottopassi) seguendo la formula generale:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_i^s (c_i k_i), \text{ con } k_s = f(t_n + \alpha_s \Delta t, y_n + \Delta t \sum_j^s (\beta_{sj} k_j))$$

L'uso del metodo avviene grazie alla tabella di Butcher in cui si indicano i coefficienti  $\alpha_s$  e  $\beta_{sj}$ :

0					
$a_2$	$b_{21}$				
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$a_m$	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$\cdots$	$b_{m\ m-1}$	
	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_{m-1}$	$c_m$

Si utilizza il metodo di ordine 4 per cui:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \\ k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3) \end{cases}$$

Questo è detto *Low storage* perché richiede poca memoria nel calcolo di  $k_j$ . L'ordine 4 è la barriera di accuratezza secondo Butcher, ovvero il limite per cui il metodo è consistente ed efficace senza la necessità di aggiunta di ulteriori parametri e relativi sottopassi.

La soluzione del metodo Rounge – Kutta del IV ordine diventa:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

### 2.4.3. Implementazione nel programma

Il primo passo è stato assegnare le costanti al problema, con cui indicare i valori dei dati iniziali. Essendo riferito alla matricola personale, il sistema risulterà unico per ogni studio.

Quindi si indica la matrice **A** utile a trasformare il sistema del secondo ordine in un sistema lineare autonomo. Questa dipende direttamente dal sistema di forze, essendo costituita dai coefficienti del sistema, attraverso i termini fisici di massa e rigidità.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.18 & 0 & 1.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & -1 & 0 & 0.55 & 0 & 0 & 0 & -0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & -0.91 & 0 & 0.44 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.36 & 0 & -1.36 & 0 & 1.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre la tabella di Butcher assume i coefficienti in funzione dell'ordine di grandezza del metodo di Runge – Kutta:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

In questa prima fase si indica ciò che è relativo al tempo, ovvero il passo temporale, il tempo d'inizio ( $t = 0$ ) ed il tempo finale ( $t = NMAX = 100$ ). Quindi è necessario implementare un ciclo di *for* fino al tempo finale, in cui si uscirà dal ciclo; pertanto si avranno 101 cicli temporali.

Metodo di Euler:

```

61     % ciclo temporale
62 -   for n=1:NMAX
63 -       if (time+dt>=tend)
64 -           dt=tend-time;
65 -       end
66 -       if (time>=tend)
67 -           break
68 -       end
69
70     % Metodo Euler esplicito -----
71     % y(n+1) = y(n) + dt*f(time,y(n))   forma per caso scalare
72 -   Q(:,n+1) = Q(:,n) + A*Q(:,n)*dt;   % forma per caso vettoriale
73     % -----
    
```

Metodo di Runge – Kutta IV ordine:

```

73     % Metodo Runge Kutta di ordine 4 -----
74 -   k1 = A*Q(:,n);
75 -   k2 = A*( Q(:,n)+0.5*dt*k1 );
76 -   k3 = A*( Q(:,n)+0.5*dt*k2 );
77 -   k4 = A*( Q(:,n)+dt*k3 );
78
79 -   Q(:,n+1) = Q(:,n) + dt/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
80     % -----
    
```



Nell'immagine è evidente il ciclo temporale con lo sviluppo del metodo di Eulero (nella prima) e del metodo di Runge – Kutta (nella seconda), applicati nella forma vettoriale dato che si opera attraverso la matrice A.

Il termine  $dt$  è l'incremento temporale, ovvero il rapporto tra il tempo finale (attuale) e il numero di passi temporali impostati:  $dt = \frac{tend}{NMAX}$ .

Restando nel ciclo temporale, si indicano il grafico della soluzione trovata ed il risultato della soluzione esatta. Questa è calcolata nel medesimo modo in tutti i programmi per poter valutare l'esattezza del metodo utilizzato, per cui si riporta lo script:

```
% Calcolo della soluzione esatta
Z(:,n) = expm(A*(te(n)))*Z0;
% Calcolo errore globale commesso (in norma L2)
error = error + ( Q(:,n)-Z(:,n) ).^2*( dt );
```

Tramite l'errore (*error*) siamo in grado di graficare la soluzione esatta e quantificare l'esattezza del metodo. È intuibile come aumentando il tempo di calcolo, oppure riducendo i parametri di controllo come la discretizzazione spaziale, si avrà un incremento dell'errore.

## 2.5. Osservazioni e risultati finali

Per permettere la stampa degli errori calcolati nelle traiettorie confrontando la soluzione calcolata e quella esatta, è importante porre la definizione:

$$error = error + (Q(:,n) - z(:,n)).^2 * (dt)$$

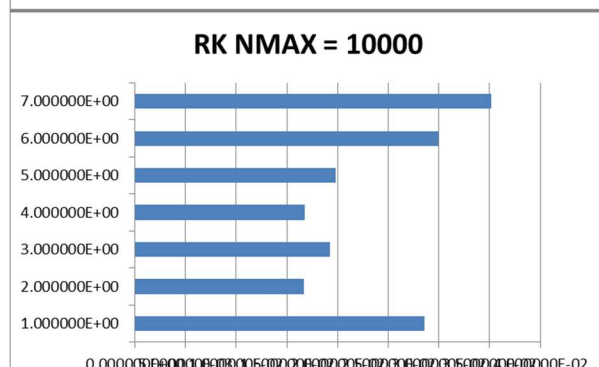
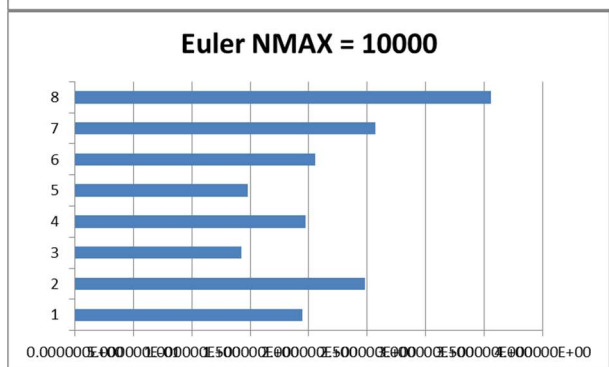
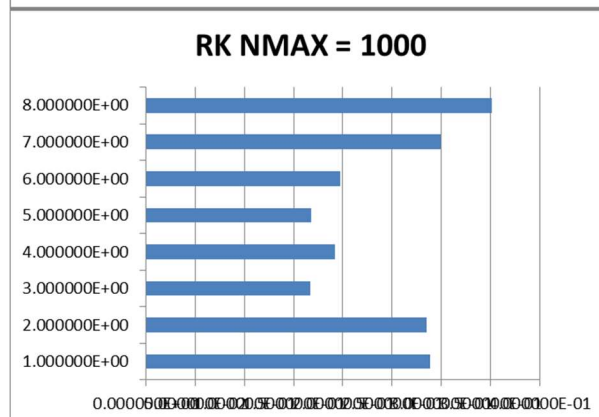
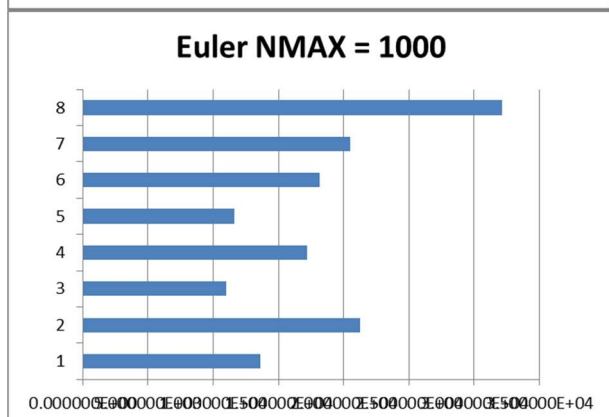
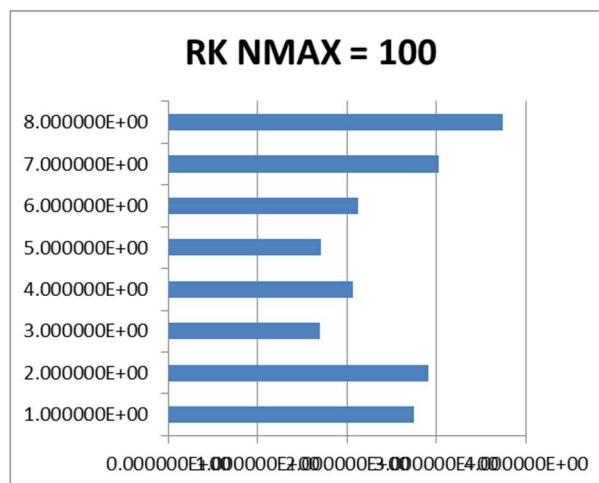
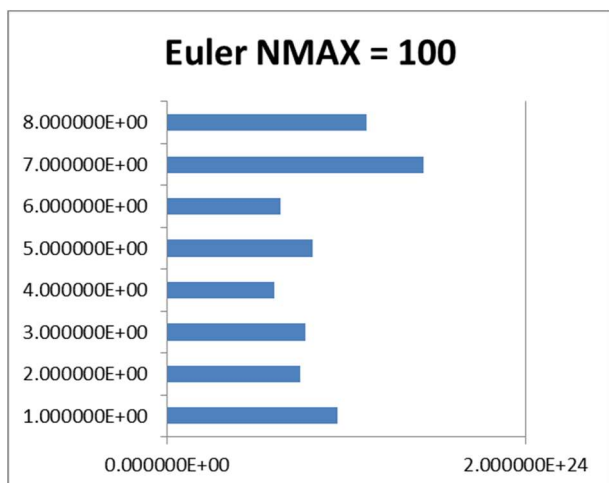
Dove il termine temporale è definito come:  $dt = t_e(n + 1) - t_e(n)$

Al termine dell'analisi si conclude che il metodo di Eulero è più semplice e veloce nel calcolo, ma risultano errori dell'ordine del  $10^3$ ; il metodo di Runge – Kutta è più sofisticato ma più esatto, infatti si calcolano errori dell'ordine del  $10^1$ .

Di seguito si riportano vari tentativi di calcolo variando di volta in volta alcuni parametri, per confrontarli e valutarne la variazione degli errori. L'analisi è stata condotta in un foglio di calcolo excel:

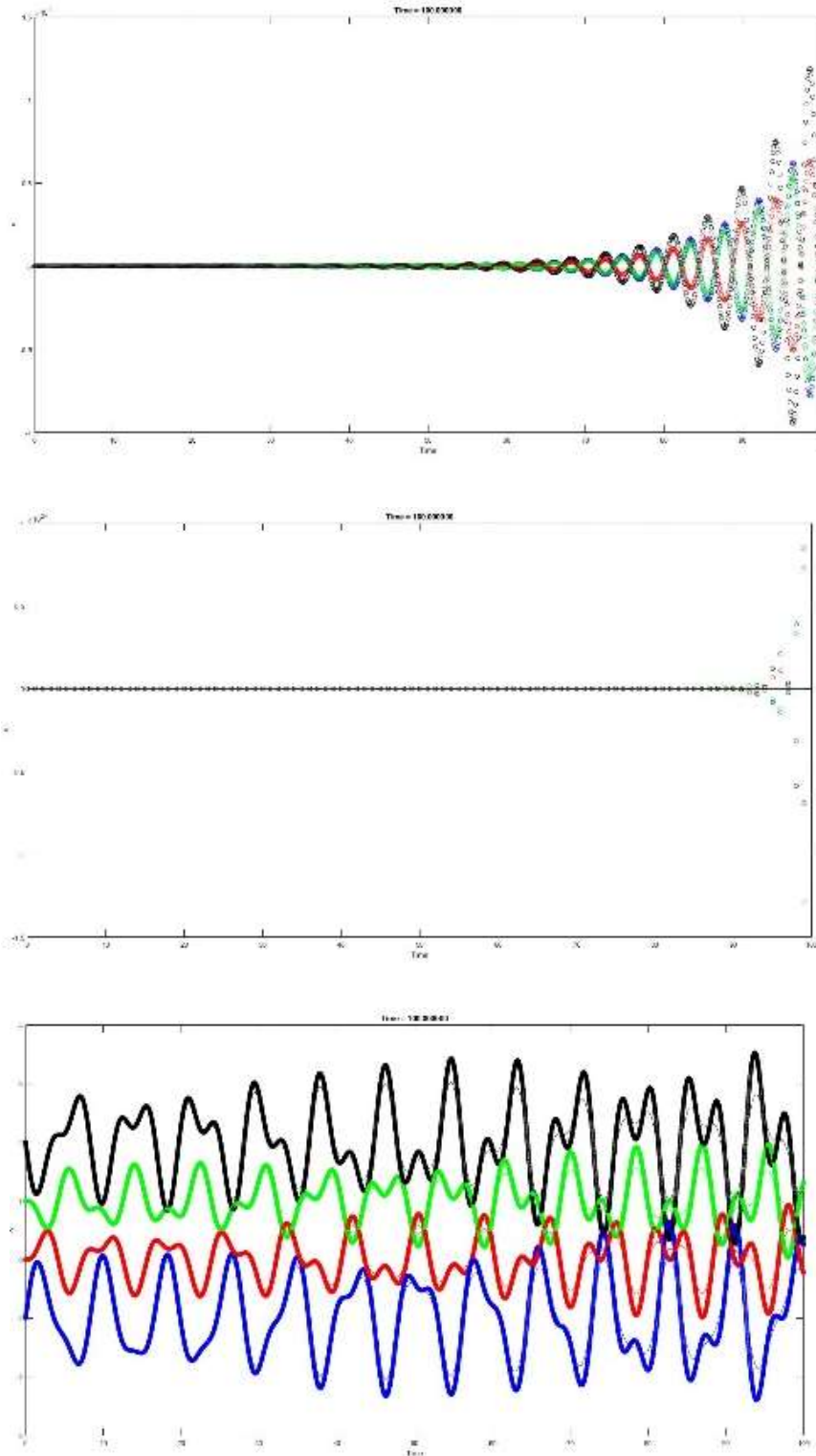
<b>metodo di Eulero</b>		IMAX = 1000		tend=100
	1 - NMAX=100		2 - NMAX=1000	3 - NMAX=10000
x1	9.522086E+23		1.362274E+04	1.944069E+00
v1	7.390448E+23		2.127433E+04	2.477709E+00
x2	7.692173E+23		1.102033E+04	1.424412E+00
v2	5.970094E+23		1.721423E+04	1.969516E+00
x3	8.108826E+23		1.162937E+04	1.475610E+00
v3	6.293292E+23		1.819159E+04	2.056925E+00
x4	1.430637E+24		2.051421E+04	2.566201E+00
v4	1.110310E+24		3.211973E+04	3.554407E+00
<b>metodo di Rounge Kutta</b>		IMAX = 1000		tend=100
	1 - NMAX=100		2 - NMAX=1000	3 - NMAX=10000
x1	2.753548E+00		2.882820E-01	2.884527E-02
v1	2.912466E+00		2.853368E-01	2.856787E-02
x2	1.691819E+00		1.669733E-01	1.671526E-02
v2	2.063011E+00		1.921464E-01	1.924695E-02
x3	1.710405E+00		1.674496E-01	1.676460E-02
v3	2.127745E+00		1.977501E-01	1.980970E-02
x4	3.022979E+00		2.991048E-01	2.994473E-02
v4	3.743200E+00		3.510146E-01	3.516231E-02

Si evidenziano le differenze tra l'esattezza del metodo Rounge – Kutta rispetto al metodo di Eulero con le stesse condizioni di discretizzazione. Successivamente vengono graficati i risultati in ortogrammi, grazie ai quali si evidenziano le differenze tra i 4 corpi e le 4 velocità, nell'ordine esplicitato dalle tabelle precedenti. Relativamente alle condizioni iniziali, risultano di errore maggiore i corpi posti alle estremità del sistema, quindi M1 ed M4, particolarità evidenziata anche dai grafici degli andamenti temporali creati da MatLab.

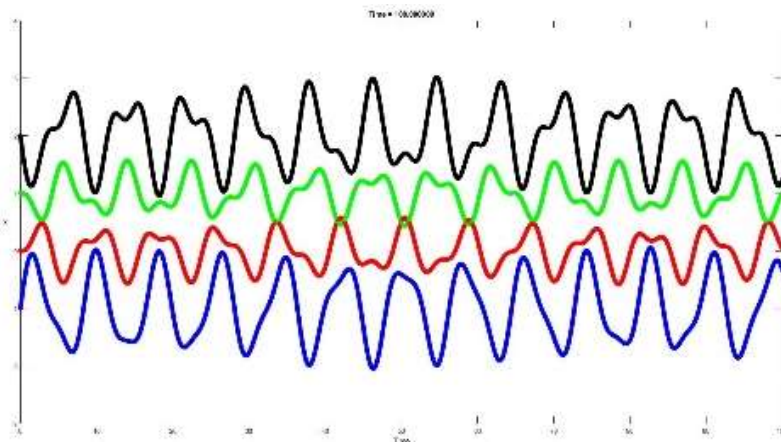
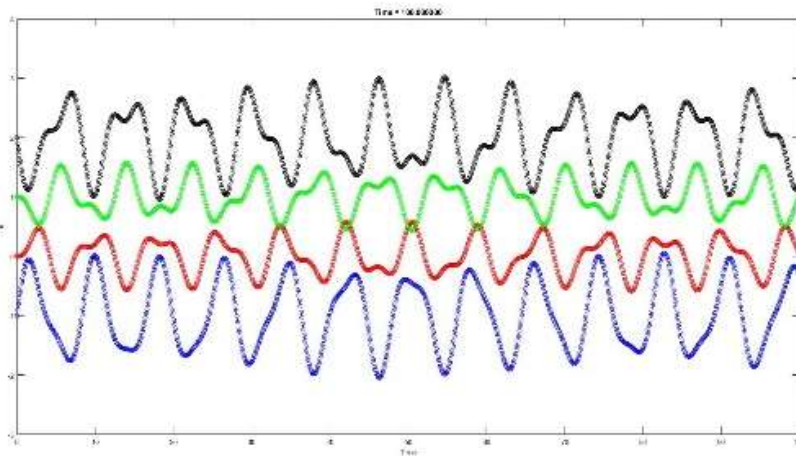
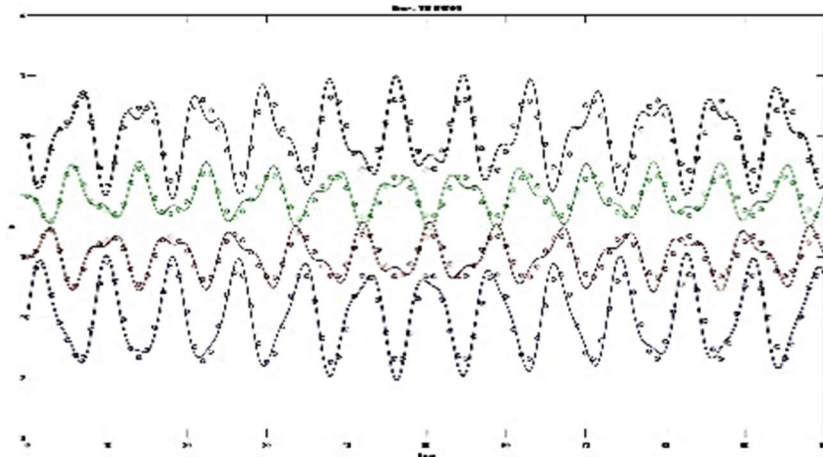


Implementando il calcolo nei tre casi di NMAX (100, 1000 e 10000) MatLab applica i grafici relativi all'evoluzione dei corpi nel tempo, confrontando le soluzioni numeriche con quella esatta.

Nel metodo di Eulero, la prima prova evidenzia una chiara “esplosione” della soluzione con un alto errore, la seconda prova è leggermente più accurata, mentre la terza prova mantiene una soluzione più costante nell’ampiezza delle oscillazioni, demarcando una incongruenza fisica quale la sovrapposizione di alcuni corpi vicini.



Nel metodo di Runge – Kutta, tutte le prove mantengono una certa costanza nell'ampiezza, senza “esplodere” come nel caso del metodo di Eulero. Bisogna notare come tutti i corpi non arrivano mai a sovrapporsi, quindi si descrive un fenomeno fisicamente congruente con la realtà. Perciò il metodo di Runge – Kutta è caratterizzato da una maggiore esattezza nella sua applicazione fisica.

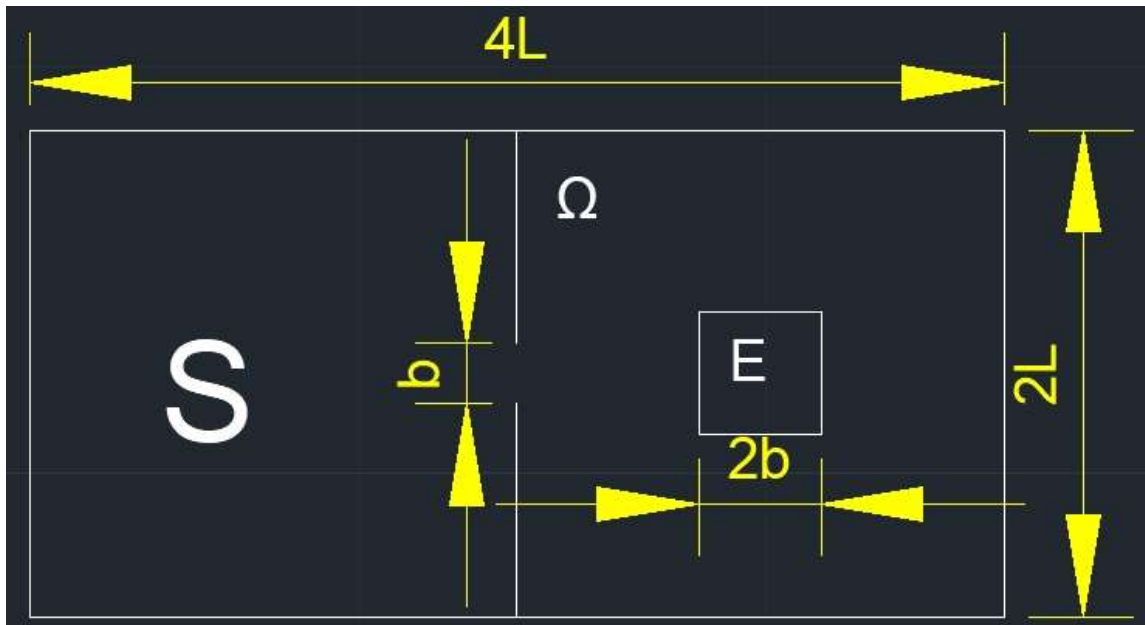


### 3. Esercizio sulle equazioni alle derivate parziali (PDE): 2D dambreak problem

#### 3.1. Descrizione del problema ed assegnazione delle costanti

Il problema consiste nel valutare il comportamento di un'onda d'acqua che esce dalla rottura di un serbatoio. In prossimità si pone un edificio che interferisce all'evoluzione del moto ondoso.

Lo schema si presenta come segue in figura:



I dati noti del problema dipendono strettamente dalle sei costanti iniziali corrispondenti al numero di matricola 198365

$$c_1=1; c_2=9; c_3=8; c_4=3; c_5=6; c_6=5.$$

Per cui le distanze hanno il valore di:

$$L = 1+c_6 = 6,$$

$$b = 0.25*L = 1.5.$$

Si pone il centro del sistema ( $x = 0; y = 0$ ) nella breccia del serbatoio; quindi il dominio è  $\Omega = [-12;12] \times [-6;6]$  mentre la dimensione del serbatoio è  $S = [-12;0] \times [-6;6]$ . L'edificio è posto lungo l'asse  $\hat{x}$  nella parte opposta al serbatoio rispetto alla diga, con dimensioni  $E = [4.5;6.5] \times [-1.5;1.5]$ . La breccia che si apre nella diga è larga 1.5, in linea con l'edificio lungo l'asse  $\hat{x}$ .

Non sono date delle unità di misura e delle grandezze reali nel problema, ma per meglio comprendere il fenomeno in analisi si pongono le distanze in metri (m), quindi le velocità in metri al secondo (m/s) e le pressioni in Pascal (Pa), concordi col sistema di riferimento internazionale (S.I.).

Le condizioni fisiche di partenza sono le velocità nulle e i tiranti. Nel serbatoio si ha  $h = 2+c_2$ , nella zona dell'edificio si ha  $h = 0.1*(1+c_3)$ . È necessario imporre un tirante iniziale

non nullo nella zona di allagamento per permettere il funzionamento dei metodi ed evitare evidenti incongruenze.

### 3.2. Impostazione del problema alle acque basse: shallow water problem

Il problema è in genere pluridimensionale perché relaziona il tirante con i flussi nelle varie direzioni. Si fa riferimento all'equazione di avvezione  $\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ , cioè l'equazione alle derivate parziali matriciale, dove  $Q$  indica uno stato ed  $F$  la funzione.

Il sistema delle PDE completo è dato anche dalle condizioni iniziali, quindi si ottiene nella forma generale

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ Q(x, 0) = H(x) \end{cases}$$

Il problema si può studiare se il sistema è definito *iperbolico*, deducibile dalla forma quasi-lineare:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Quindi si studiano le caratteristiche della matrice  $\mathbf{A}(Q)$ : se questa è diagonalizzabile tramite gli autovettori, il sistema sarà iperbolico ed è possibile effettuare l'analisi del fenomeno descritto.

Il primo compito è quello di analizzare la matrice  $\mathbf{A}$  sotto questo aspetto, per definizione:

“sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Diremo che  $A$  è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale  $D$  di ordine  $n$ , ovvero se e solo se  $P$ , matrice invertibile, tale che  $D = P^{-1}AP$ , ovvero  $PD = AP$ . La matrice  $P$  si dice matrice diagonalizzante di  $A$ .”

(Da <http://www.youmath.it/lezioni/algebra-lineare/matrici-e-vettori/1581-matrice-diagonalizzabile.html>)

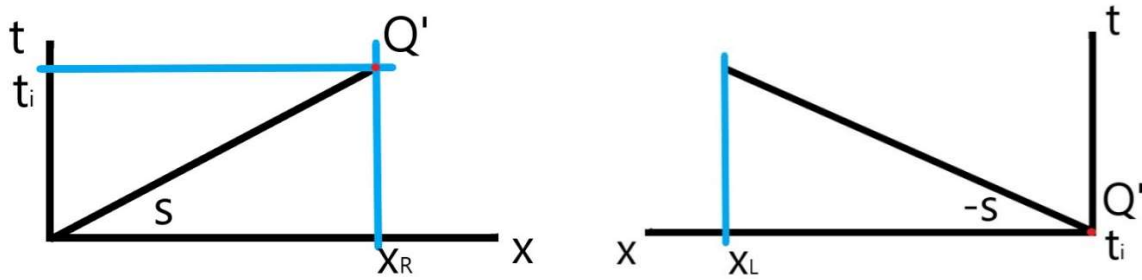
Le condizioni necessarie e sufficienti perché la matrice  $A$  sia diagonalizzabile sono:

- Il numero degli autovalori sia pari all'ordine della matrice;
- La molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincida con la relativa molteplicità.

### 3.3. Risoluzione del problema monodimensionale semplificato con riflessione dell'onda sull'edificio

Il problema monodimensionale vede l'apertura della breccia nella diga e lo svilupparsi dell'onda di Shock in direzione  $\hat{x}$ , si verifica l'impatto con l'edificio posto nella parte di destra del dominio in corrispondenza della breccia e la conseguente riflessione dell'onda di shock in direzione  $-\hat{x}$  fino alla fine del dominio del serbatoio a sinistra.

Quindi si implementa un doppio problema di Riemann, che descrive proprio l'andamento dell'onda nei due versi lungo la stessa direzione, in cui le condizioni di partenza del secondo sono le condizioni finali del primo.



Nell'impostazione del programma è necessario indicare le condizioni iniziali e al contorno, per descrivere lo stato di studio; successivamente si impongono i parametri della discretizzazione e la griglia computazionale. Questi input sono utili a migliorare la precisione e l'esattezza del metodo nella ricerca della soluzione al problema. Aumentando il numero IMAX si avrà un infittimento dello spazio lungo l'asse  $\hat{x}$ , quindi un calcolo più difficile (richiede maggior tempo) ma più esatto. Inoltre, si è scelto un NMAX per le iterazioni temporali di 1000 passi ed il numero di Courant CFL = 0.9.

Il punto fondamentale del calcolo sarà nell'idea dell'implementazione dei due problemi di Riemann; quindi si riportano gli script dei cicli di *for* utilizzati:

```

61 % I RIEMANN --> calcolo di Qs1, ti
62 - for i=1:IMAX
63 -     xi = x(i)/time;
64 -     Qs1(:,i) = ExactRiemannSWm(QL,QR,xi);
65 - end
76 % II RIEMANN --> calcolo di Qs2
77 - for i=1:IMAX
78 -     xi = x(i)/time;
79 -     Qs2(:,i) = ExactRiemannSWm(Qs_impact,QL,xi);
80 - end
    
```

Il calcolo degli stati Qs1 e Qs2 sono stati affidati alla funzione *ExactRiemannSWm* con le variabili iniziali e di impatto. Questa funzione è caratterizzata da una diramazione del tipo *if* in cui si impongono i due problemi:

$$\text{problema a sinistra (II Riemann)} \begin{cases} h = h_L \\ u = u_L \end{cases}$$

$$\text{stato centrale } star \begin{cases} h = h_s \\ u = u_s \end{cases}$$

$$\text{Problema a destra (I Riemann)} \begin{cases} h = h_R \\ u = u_R \end{cases}$$

Dove le pendenze delle rette star sono definite in base al problema

$$s_1 = u_L - \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h_s}{h_L} (h_L + h_s)}$$

$$s_2 = u_R - \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h_s}{h_R} (h_s + h_R)}$$

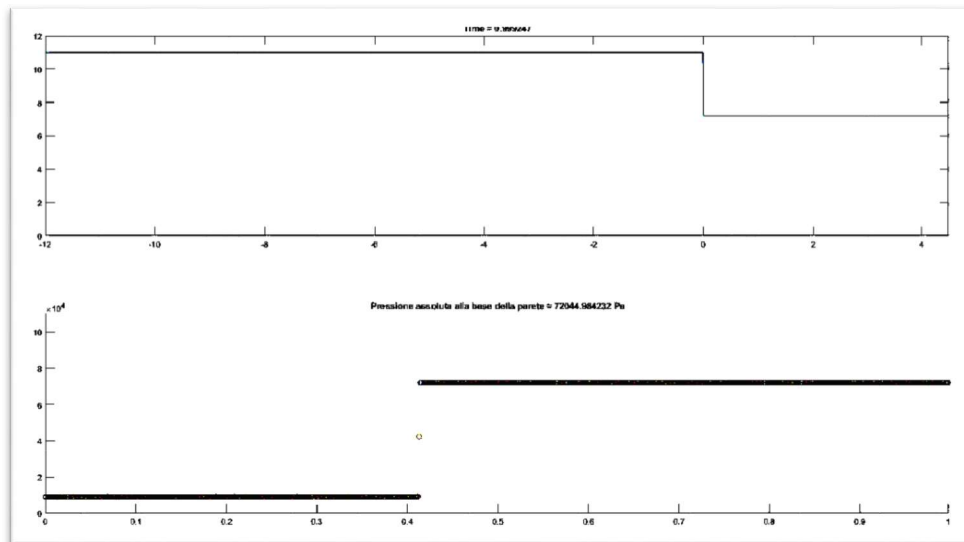
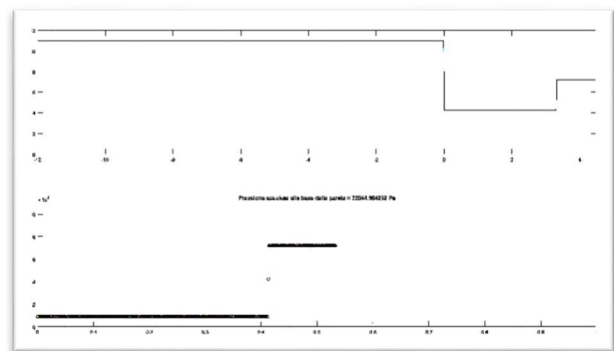
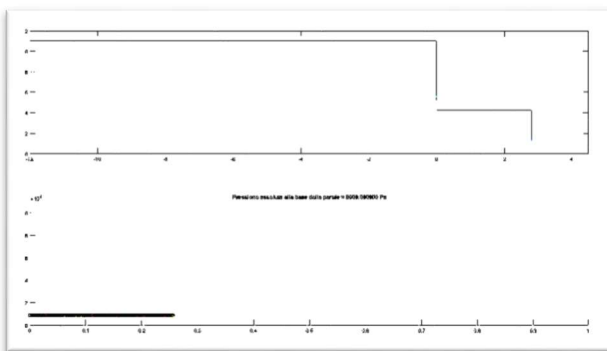


Infine, si richiede il calcolo della pressione sulla parete attraverso un ulteriore ciclo di *for* spaziale distinguendo tre casistiche:

- $(x(i) > \text{ritorno}) \ \&\& \ (\text{time} > t_i)$ , Il Riemann con shock di ritorno;
- $(x(i) < \text{andata}) \ \&\& \ (\text{time} < t_i)$ , I Riemann con shock di andata;
- Al di fuori dell'onda.

Si calcola la pressione come:  $\text{press}(i) = 10000 * Q(1, i)$

Il risultato è graficato per avere una chiara visione del fenomeno che si evolve nel tempo. È possibile visualizzare l'andamento dell'onda prima verso destra, dopo l'impatto con la parete verso sinistra. Contemporaneamente il secondo grafico indica il valore della pressione, ovvero costante di 9000 Pa prima dell'impatto ed un valore di circa 72045 Pa dopo l'impatto. Questo risulta pari a 0.4135 secondi.



In questa casistica è molto evidente l'onda di shock verticale con il suo avanzamento nel tempo, prima da sinistra a destra, poi in verso contrario con un tirante maggiore.

### 3.4. Metodo ai Volumi Finiti e metodo MUSCL per il problema bidimensionale

Il problema bidimensionale è caratterizzato dallo stesso fenomeno precedentemente descritto, ma con la considerazione dello svilupparsi delle onde anche lungo la direzione  $\hat{y}$  del dominio.

Il **metodo ai volumi finiti** associa ulteriori condizioni di bordo al problema (Border Conditions) e il sistema diventa a quattro equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ Q(x, 0) = H(x) \\ Q(x_L, t) = Q_L(t) \\ Q(x_R, t) = Q_R(t) \end{cases}$$

Si ottiene così una griglia computazionale definita dalla discretizzazione in spazio e tempo.

Il volume di controllo considerato è  $V = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] x[t^n, t^{n+1}]$ ; integrandolo in spazio e tempo si ottiene la soluzione di un metodo esatto:

$$Q_i^{n+1} = Q_n^i - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$$

Questo metodo è detto *conservativo* per costruzione e gode della proprietà *telescopica*, ovvero per un sistema chiuso, la somma della differenza dei flussi è telescopica.

$$\sum_i \Delta x Q_i^{n+1} = \sum_i \Delta x Q_i^n - \sum_i \Delta t (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$$

Quindi le quantità conservate si conservano esattamente, anche a livello discreto. La conservazione esatta è fondamentale per calcolare correttamente le onde di shock tramite il metodo numerico. Secondo il teorema di Hou – Le Floch (1994) un metodo non conservativo produce velocità e valori dell'onda di shock sbagliati.

Il metodo **MUSCL** prende il nome dall'acronimo "Monotone Up-wind Scheme for Conservation Laws" ed è per definizione di secondo ordine in tempo e spazio, creato intorno al 1979 da Van Leer. Lo sviluppo del metodo si fonda sulla ricostruzione sia in spazio che in tempo in modo lineare a tratti:

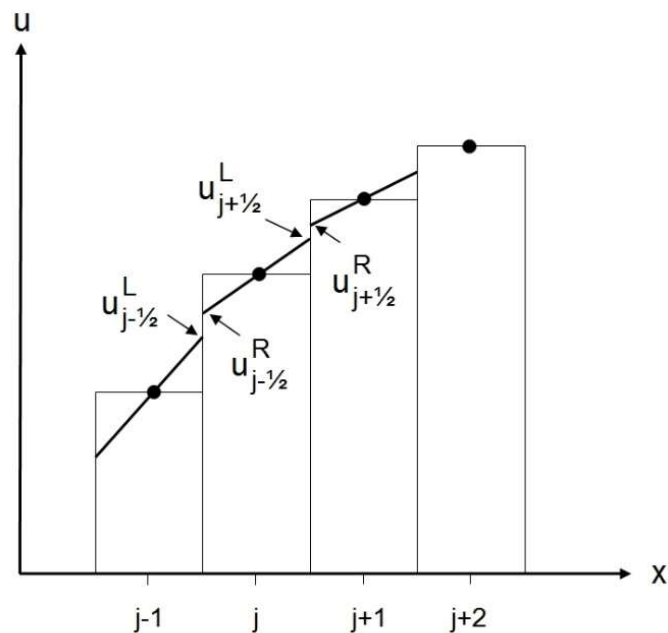
$$Q_i^n(x, t) = Q_i^n + \frac{\Delta Q_i^n}{\Delta x} (x - x_i) + \partial t Q_i^n (t - t_i)$$

Dove l'ultimo termine indica lo sviluppo della serie di Taylor, approssimando la derivata temporale.

La pendenza si calcola come:  $\Delta Q_i^n = \minmod(Q_{i+1}^n - Q_i^n, Q_i^n - Q_{i-1}^n)$ ; ovvero il valore minimo tra le differenze degli stati vicini.

Considerando il tempo in avanti (n+1), la funzione è data come:

$$\begin{cases} f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(Q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \\ f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(Q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \end{cases}$$



Piecewise linear extrapolation

Da [https://en.wikipedia.org/wiki/MUSCL\\_scheme](https://en.wikipedia.org/wiki/MUSCL_scheme)

Attraverso la formula di Gauss, scegliendo la quadratura di Gauss, si ha proprio l'approssimazione  $f_{i+\frac{1}{2}} \cong f(Q(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}))$  in grado di fornire una soluzione tramite il risolutore di Riemann. Per definizione, il metodo di MUSCL è linearmente stabile sotto la condizione di  $CFL \leq 1$ .

### 3.5. Risultati analitici e confronto dei metodi usati

Confrontando i metodi ai volumi finiti e MUSCL si analizzano le strutture dei programmi, sottolineando a differenza dell'ordine in spazio e tempo in cui lavorano. In una prima analisi si trova un confronto diretto considerando il dominio  $\Omega/E$ , ovvero senza l'interferenza dell'edificio, visualizzando graficamente l'evoluzione delle onde.

Entrambi i metodi sono sviluppati nelle due direzioni  $(x,y)$  attraverso il calcolo delle funzioni  $\Lambda$  della matrice  $\mathbf{A}$ . inizialmente si impongono le condizioni di partenza del problema date dai coefficienti standard relativi alla matricola; si definiscono anche la griglia computazionale ed il ciclo di *for* temporale.

In particolare il primo (chiamato Shallow Water Equations, SWE) è caratterizzato dal flusso di Rusanov in una diramazione del tipo *if* sullo spazio bidimensionale  $(i,j)$ .

In direzione x si hanno le condizioni secondo cui:

se  $i = 1$ , siamo sulla parete di sinistra del serbatoio

se  $i = IMAX$ , siamo sulla parete di destra del dominio

se  $\begin{cases} i = \frac{2L}{dx} \\ \frac{2L-e}{dy} \leq j \leq \frac{e}{dy} \end{cases}$ , l'onda sbatte sulla parete nel serbatoio e riflette

se  $\begin{cases} i = \frac{2L}{dx+1} \\ \frac{2L-e}{dy} \leq j \leq \frac{e}{dy} \end{cases}$ , l'onda si trova oltre la diga

altrimenti l'onda si trova all'interno del dominio senza incontrare ostacoli, sviluppandosi secondo il flusso di Rusanov.

Mentre in direzione y si esprimono i casi:

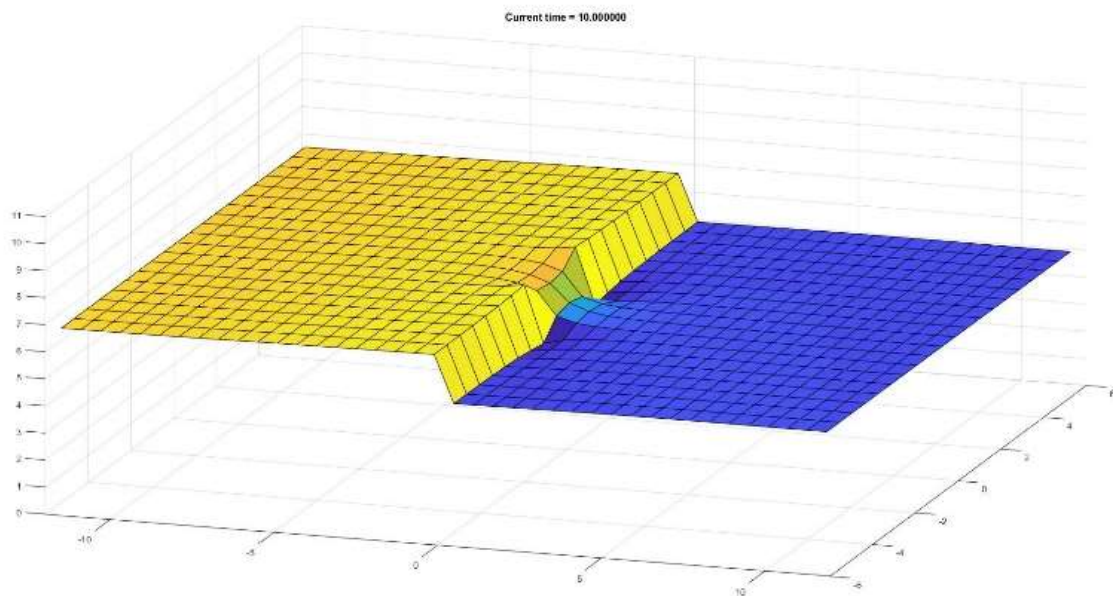
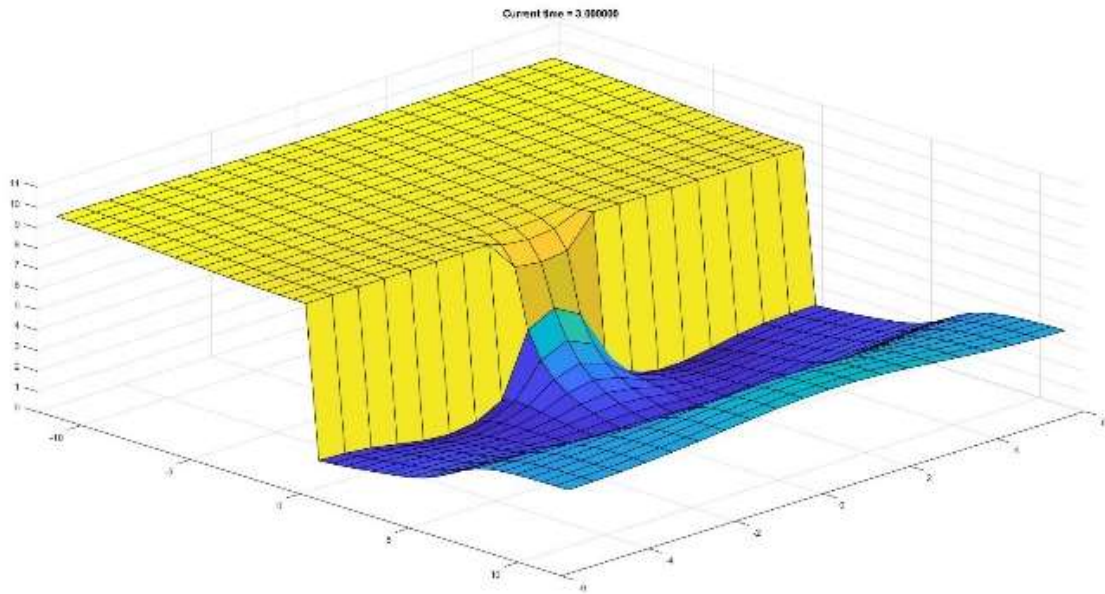
se  $j = 1$ , siamo sulla parete in basso

se  $j = JMAX$ , siamo sulla parete in alto

altrimenti l'onda si trova all'interno del dominio sviluppandosi come in direzione trasversale.

Infine si impone il calcolo della attraverso il metodo dei volumi finiti, graficando l'onda in funzione dell'avanzamento temporale ( $t = 3$  e  $t = 10$ ).

$$Q_{new} = Q - \frac{dt}{dx}(f_p - f_m) - \frac{dt}{dy}(g_p - g_m)$$



Il secondo metodo è caratterizzato dallo stesso flusso di Rusanov, ma calcolato con il metodo di Kolgan, proprietà principale del MUSCL. La ricostruzione in spazio e tempo è formata da due cicli for nelle due direzioni  $i$  e  $j$  fino ai valori massimi (IMAX e JMAX)

```

82      % ricostruzione in spazio e tempo
83 -   for i=1:IMAX
84 -       for j=1:JMAX
85 -           % pendenza in x
86 -           if (i==1)
87 -               slope_x = zeros(3,1);    % primo ordine al bordo
88 -           elseif(i==IMAX)
89 -               slope_x = zeros(3,1);    % primo ordine al bordo
90 -           else
91 -               slope_x = minmod( Q(:,i+1,j)-Q(:,i,j), Q(:,i,j)-Q(:,i-1,j) );
92 -           end
93 -           %pendenza in y
94 -           if (j==1)
95 -               slope_y = zeros(3,1);    % primo ordine al bordo
96 -           elseif(j==JMAX)
97 -               slope_y = zeros(3,1);    % primo ordine al bordo
98 -           else
99 -               slope_y = minmod( Q(:,i,j+1)-Q(:,i,j), Q(:,i,j)-Q(:,i,j-1) );
100 -           end

```

concludendo con il metodo di Kolgan in quattro casi definiti *slope*:

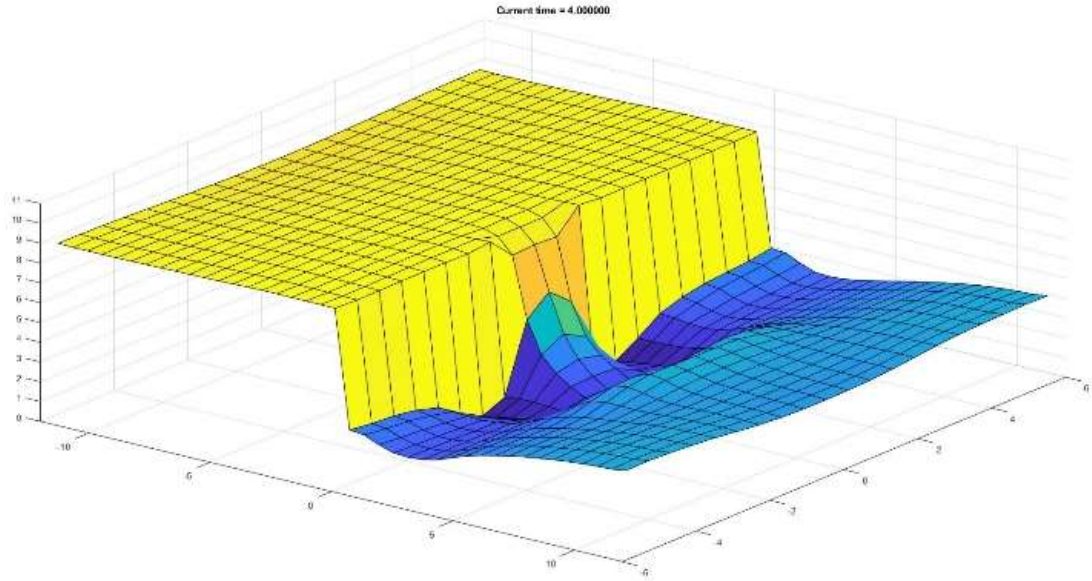
$$w_{Lx} = Q - \frac{1}{2} slope_x$$

$$w_{Rx} = Q + \frac{1}{2} slope_x$$

$$w_{Ly} = Q + \frac{1}{2} slope_y$$

$$w_{Ry} = Q - \frac{1}{2} slope_y$$

Alla fine dell'implementazione del flusso di Rusanov, si ha la stessa esplicitazione del calcolo della soluzione con metodo ai volumi finiti, con il relativo grafico dell'evoluzione dell'onda in funzione del tempo.



Dalle rappresentazioni riportate, è chiara l'analogia dei risultati dei due metodi seppur differenti. Questo è dovuto dallo stesso percorso di calcolo tramite l'analisi del flusso di Rusanov.

Nel metodo MUSCL si ha una descrizione fisica dell'onda visivamente migliore rispetto ai volumi finiti. Infatti la caratteristica principale dell'ordine in tempo e spazio è proprio quella di rappresentare uno stato con più precisione. Questo è l'effetto dell'analisi tramite un metodo di ordine superiore come il MUSCL.

### 3.6. Inserimento dell'edificio e confronto dei risultati

Dopo aver studiato il problema bidimensionale in assenza dell'edificio, si pongono le condizioni per capire come l'onda risponde all'interferenza dell'edificio lungo l'asse del suo sviluppo longitudinale. Si è deciso di identificare i vertici dell'edificio per semplificare i successivi sviluppi delle formule determinando quattro punti.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left[ \frac{3L - b}{dx}; \frac{L - b}{dy} \right] \\
 P_2 &= \left[ \frac{3L + b}{dx}; \frac{L - b}{dy} \right] \\
 P_3 &= \left[ \frac{3L + b}{dx}; \frac{L + b}{dy} \right] \\
 P_4 &= \left[ \frac{3L - b}{dx}; \frac{L + b}{dy} \right]
 \end{aligned}$$

In questo caso si utilizza il metodo MUSCL bidimensionale come descritto nel precedente capitolo attraverso il metodo di calcolo di Kolgan, facendo delle piccole considerazioni aggiuntive relative all'edificio e alla sua locazione nel dominio.

Quindi si utilizzano le stesse diramazioni in *if* per esprimere l'evoluzione dell'onda; bisogna sottolineare la condizione interna all'edificio di  $h$  costante e definire attentamente le pareti, ovvero puntualmente dove il dominio incontra l'edificio E.

Si calcola analiticamente la variazione nel tempo della pressione sulla parete dell'edificio rivolta verso la breccia, tramite la formula di Bernoulli

$$p = \gamma \left( h - \frac{v^2}{2g} \right)$$

Il calcolo è esplicitato nel *capture* dello script seguente:

```

241 % Qpress è Q in corrispondenza della parete
242 - Qpress(:, :, :) = Qnew( :, P1(1), (P4(2)-P1(2))/2 );
243 - tirante = Qpress(1);
244 - pressione = 10000*(tirante);
245 - vel = Qpress(2)/Qpress(1)
246
247 - if (pressione-9000>plim)
248     % stampo il time in cui ho il primo aumento di pressione
249     % sull'edificio
250     time;
251 - end

```

Si nota come nell'if è stato imposto la stampa del risultato della pressione solo successivamente aver raggiunto un valore limite minimo. Dato che la condizione iniziale impone un tirante relativo al CFL,  $pressione = CFL * \gamma$ , risulta che sulla parete si ha già una certa pressione non – nulla all'istante di partenza dell'onda. Questo è fisicamente incorretto, perciò si sceglie il valore minimo nel momento in cui l'onda si infrange sull'edificio. Il *plim* indica il valore di pressione massima sopportata dall'edificio, nel problema ipotizzato con un valore qualsiasi possibile.

Per ottenere un output del calcolo che sappia indicare un risultato ben visibile, si costruisce in un unico grafico lo sviluppo bidimensionale dell'onda nell'intero dominio, la pressione calcolata sulla parete e la velocità dell'onda sul punto medio trasversale. Il tutto sempre in funzione del tempo, per visualizzare in contemporanea tutti i parametri del fenomeno.

Ogni grafico inserito richiede la definizione di alcune caratteristiche:

*subplot*, per indicare la suddivisione degli spazi;

*surf* o *plot*, a seconda del tipo di grafico;

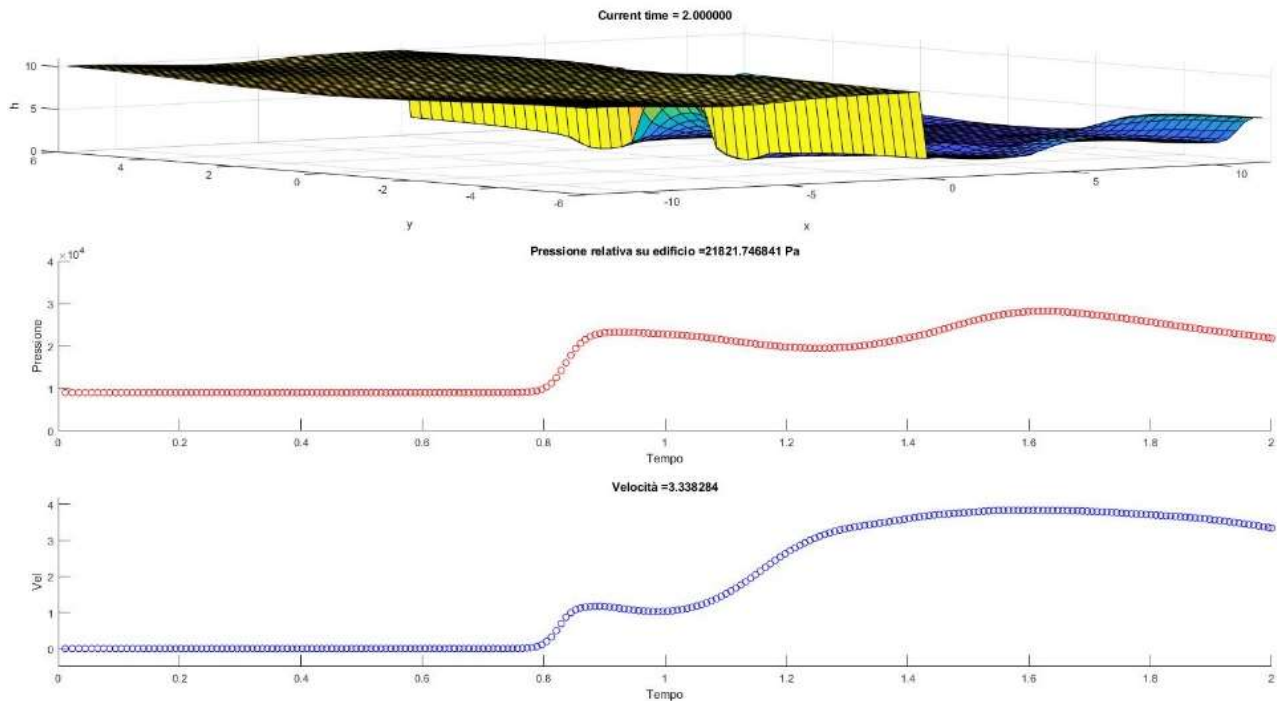
*axis*, definendo i termini sugli assi da confrontare;

*title*, *xlabel* e *ylabel*, per indicare titolo e parametri in confronto.



Il risultato ottenuto è ben visibile, riconoscendo il momento di impatto dell'onda sull'edificio.

Si nota come i massimi relativi di pressione e velocità vanno a coincidere, dato che hanno una relazione direttamente proporzionale col tirante dell'acqua.



La differenza sostanziale tra il metodo unidimensionale e quello bidimensionale è che il tempo di impatto sull'edificio è ritardato notevolmente. Infatti si ha l'impatto dell'onda sull'edificio al tempo 0.7649 secondi, mentre il valore della pressione subisce una variazione dopo aver ottenuto il suo massimo in corrispondenza dell'impatto, ottenendo circa 23000 Pa, quindi notevolmente inferiore alla pressione calcolata nel caso semplificato.

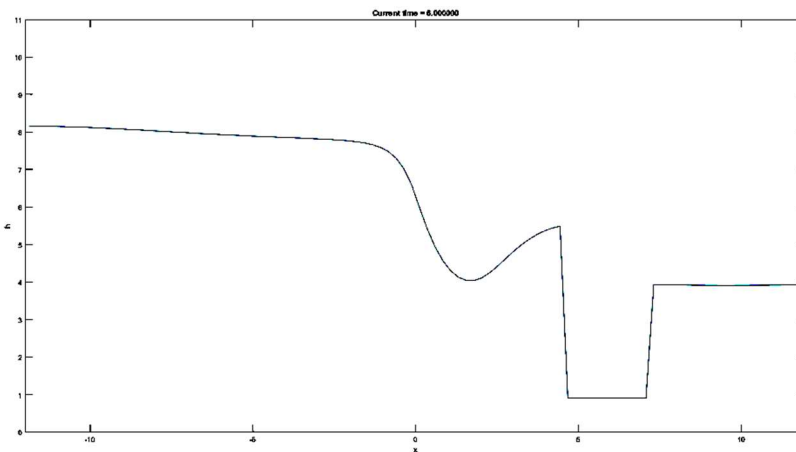
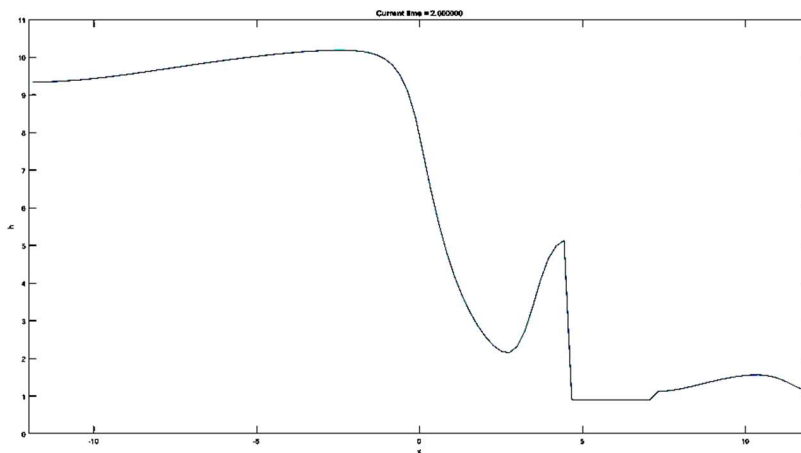
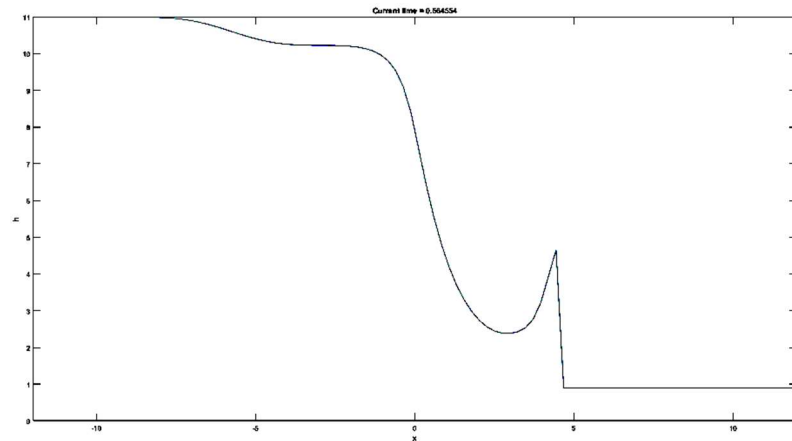
Visivamente è chiara la differenza tra l'analisi monodimensionale e bidimensionale: il calcolo nel primo caso si basa su un unico parametro di "stato" in funzione dello spazio lungo la sola direzione x, in evoluzione col tempo. Perciò si verifica un andamento lineare costante nel suo valore massimo.

In questo studio si è graficato proprio il tirante dell'acqua, raffigurando un'onda in evoluzione in uscita dal serbatoio che impatta su una parete e ritorna indietro.

Questo comportamento è meglio raffigurato dal secondo caso, analizzando l'evoluzione del tirante anche lungo la direzione y. La conseguenza è una diffusione del fenomeno nello spazio del dominio, significativamente caratterizzato da una breccia limitata nella parete del serbatoio. Per cui l'evoluzione dell'onda risulterà oscillatoria, una ricostruzione nettamente più realistica.

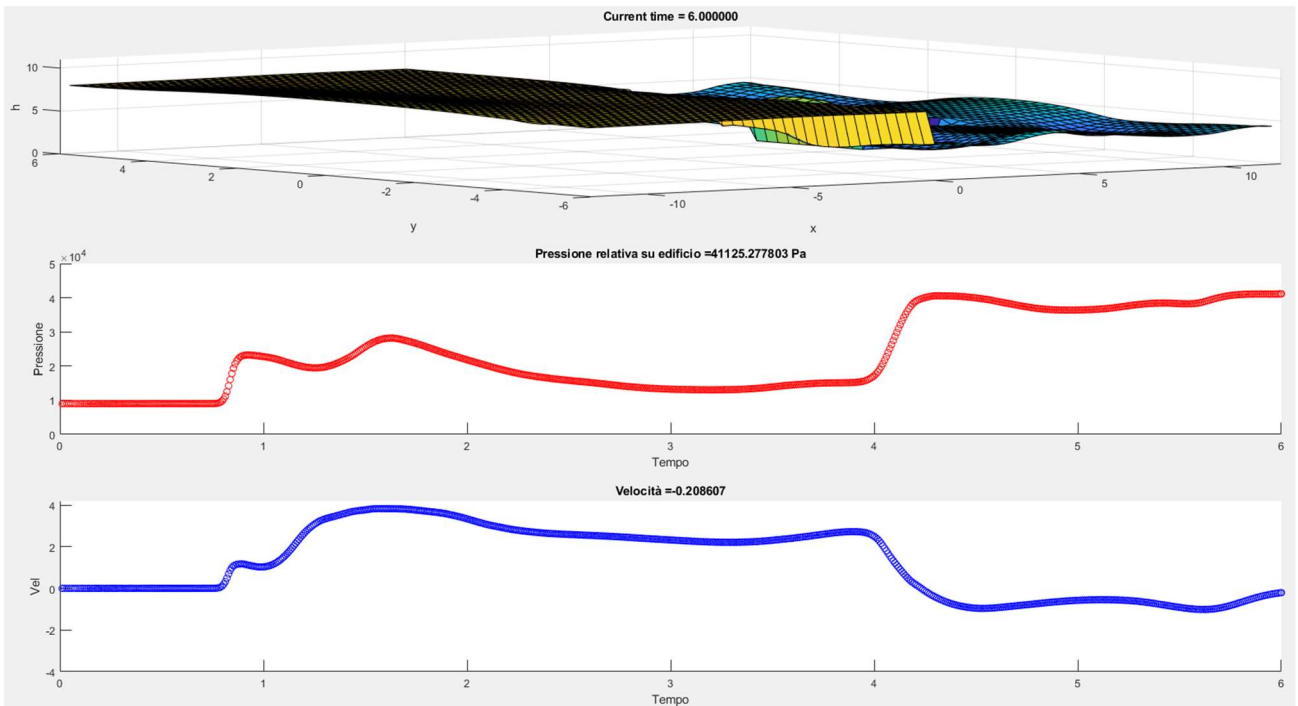
Di seguito si riportano i grafici che descrivono il comportamento dell'onda 3D con una visione monodimensionale, ovvero tramite una sezione in corrispondenza dell'asse orizzontale, nei tre tempi 0.5 secondi, 2 secondi e 6 secondi.

## Progetto del corso di Metodi Numerici per l'Ambiente



Infine si sottolinea come il valore della pressione rimanga costante nel caso monodimensionale, perché dipende proprio dal tirante costante col passaggio dell'onda. Mentre nel caso bidimensionale si verifica una variazione della pressione calcolata sulla parete, proporzionale al tirante nello stesso punto che oscilla con l'evoluzione temporale. In particolare si è voluto aumentare il tempo finale della simulazione fino a 6 secondi, scoprendo come l'onda sbatte sulla parete di destra e torna indietro. Il fenomeno trova particolare interesse nel risultato graficato dalle pressioni e velocità: quando l'onda impatta sulla parete ha velocità nulla, tornando indietro ha velocità negativa sul punto di calcolo; corrispondentemente l'oscillazione della pressione risente del nuovo tirante maggiore

dell'onda di ritorno, così come calcolato nel caso monodimensionale, aumentando il suo valore massimo fino a circa 45000 Pa.



Nell'ultima immagine si schematizza la diffusione dell'onda in uscita dalla breccia nelle due direzioni  $x$  e  $y$ , evidenziando ancora una volta la larghezza della breccia nei confronti dell'edificio.

