

# 1. STATISTICA

La POPOLAZIONE è l'insieme di tutti i valori possibili di una grandezza. È distinto in DISCRETO se è finito, CONTINUO se sono infiniti valori. Una sua estrazione è detta CAMPIONE. Un intervallo di valori ha degli ESTREMI, definiti come massimi assoluti o locali per un certo tempo.

↳ Se ne analizza la PROBABILITÀ di SUPERAMENTO

X variabile aleatoria, cioè una variabile che può assumere valori diversi in dipendenza da qualche fenomeno aleatorio. Una funzione  $X$  è misurabile se per ogni  $A \in \mathcal{E}$  si ha che  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ . Questa definizione di misurabilità è una generalizzazione di quella definita da Lindgren (1976): una funzione  $X$  definita sullo spazio campionario  $\Omega$  si dice misurabile rispetto al campo di Borel  $\mathcal{B}$  se e solo se l'evento  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$  appartiene a  $\mathcal{B}$  per ogni  $t$ .

$X$  è l'insieme dei valori =  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  con  $n$  osservazioni

Se la popolazione è DISCRETA, si definisce una FREQUENZA RELATIVA:  $P_k = \frac{N_k}{n}$  rapporto tra il numero di volte in un certo evento e il totale delle osservazioni  $n_i$ .

↳ Nel caso di una popolazione CONTINUA, si ordinano le osservazioni con valori crescenti creando l'intervallo  $I_k = \frac{x_n - x_1}{N}$  diviso il numero di sottointervalli.

FREQUENZA CUMULATA: numero di volte in cui un evento accade nell'intervallo registrato.

$$F(x) = P[X \leq x] \in [0, 1]$$

⚠ Non si può definire il valore esatto di un dato continuo, ma solo il superamento di una soglia.

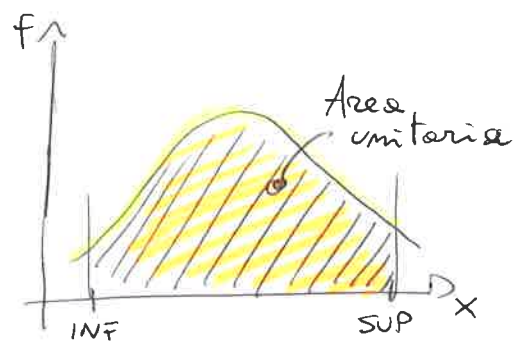
"La probabilità è l'integrale ~~temporale~~ delle densità di probabilità"

$$F(x) = \int_{\text{INF}}^x f(x) dx$$

quindi vale anche  $f(x) = \frac{d}{dx} F(X \leq x)$

Per definizione  $F(x) = \int_{\text{INF}}^{\text{SUP}} f(x) dx = 1$

cioè  $F(X \leq \text{SUP}) = 1$  è evento certo.



• MOMENTI / DISTRIBUZIONI

definito un ordine r si ha

$$m_r = \int_{\text{INF}}^{\text{SUP}} x^r \cdot f(x) dx$$

- ordine r=1 → MEDIA

$$m_1 = \int_{\text{INF}}^{\text{SUP}} x \cdot f(x) dx \quad \text{detto VALORE ATTESO}$$

$$\Delta m_1 = 0!$$

$$\mu_1 = \int_{\text{INF}}^{\text{SUP}} (x - m_1)^1 \cdot f(x) dx = |E(x)|$$

- ordine r=2 → VARIANZA

$$\mu_2 = \int |x - E(x)|^2 \cdot f(x) dx = \sigma^2(x)$$

- ordine r=3 →  $\mu_3 = \int |x - E(x)|^3 \cdot f(x) dx$

- ordine r=4 →  $\mu_4 = \int |x - E(x)|^4 \cdot f(x) dx$

di Skewness

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

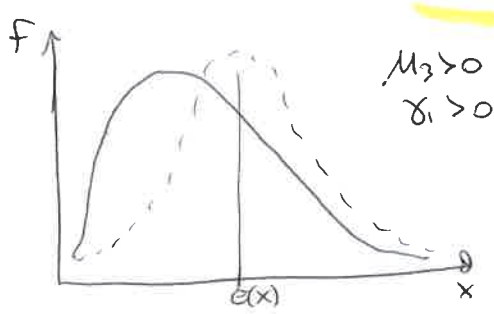
asimmetria della funzione

INDICI ADIMENSIONALI

di Kurtosi

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

distanza della funzione di Gauss



La curva di Gauss è perfettamente simmetrica nel valore atteso  $\mu_1 = 0$ , inoltre  $\mu_3 = 3\mu_2$  quindi anche  $\mu_2 = 0$ .

In assenza della densità  $f(x)$  non si hanno i momenti, ma sono riconducibili con i MOMENTI CAMPIONARI.

M.C. I ordine  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$

M.C. II ordine  $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$

Con molte osservazioni, i momenti campionari tendono al rispettivo momento cercato, quindi per il teorema di Bernoulli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = E(x) \quad \text{valore atteso}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \sigma^2 \quad \text{varianza}$$

Si trova la densità di probabilità delle formule

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right]$$

per grandi campioni di osservazione si può porre  $\sigma^2 \rightarrow \sigma^2(x)$  e  $b \rightarrow E(x)$

allora  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^2(x)} \exp\left[-\frac{(x-E(x))^2}{2\sigma^2(x)}\right]$

e per cui è lecito  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_x^2} \exp\left[-\frac{|x-\bar{x}|^2}{2S_x^2}\right]$

tramite i momenti campionari si risale alla funzione della densità di probabilità.

Se le dimensioni dei dati sono spaziali, la funzione

è detta FUNZIONE ALEATORIA  $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\partial^N F}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_n}$

ipotesi della funzione aleatoria:

1. STAZIONARIETÀ: la soluzione non cambia per una traslazione rigida di  $\Delta t$  dei punti.

$$F(z(t_1 + \Delta t), z(t_2 + \Delta t), \dots, z(t_n + \Delta t)) = F(z(t_1), z(t_2), \dots, z(t_n))$$

2. STAZIONARIETÀ del II ordine: limitazione della verifica di conservazione di probabilità ~~da~~ fino al II dato  $(z_1, z_2)$

$$\text{Prob} \{ z(t_1 + \Delta t) \leq z_1, z(t_2 + \Delta t) \leq z_2 \} = \text{Prob} \{ z(t_1) \leq z_1, z(t_2) \leq z_2 \}$$

→ SI IMPONGONO 3 CONDIZIONI:

I)  $E|z(x)| = \langle z(x) \rangle = \int z(x) \cdot f_z(z) dz$   
costante nello spazio, la media non dipende dalla posizione  $x$ .

II)  $\sigma_z^2(x) = E[(z(x) - E(z))^2] = \int (z(x) - E(z))^2 \cdot f_z(z) dz$   
costante nello spazio, la varianza non dipende dalla posizione  $x$ .

III)  $C_z(x_1, x_2) = C_z(x_1 - x_2)$  la COVARIANZA dipende dalla distanza reciproca  $x_1$  e  $x_2$ .

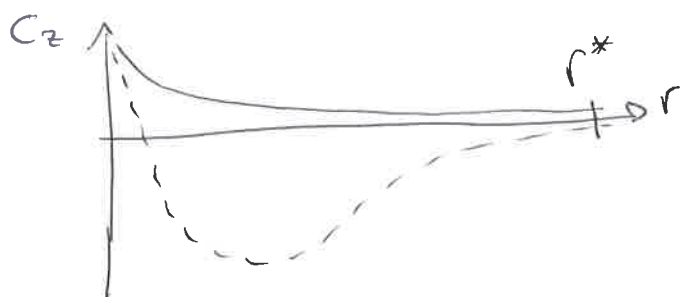
$$C_z(x_1, x_2) = E[(z(x_1) - E(z))(z(x_2) - E(z))]$$

$$= \int (z(x_1) - E(z))(z(x_2) - E(z)) f_z(z) dz = C_z(x_1 - x_2)$$

Tramite la covarianza si può valutare l'aleatorietà dei dati dalla relazione reciproca con la funzione statistica

↳ Se il valore della covarianza tende a zero

$C_z(x_1 - x_2) \rightarrow 0$  significa che i dati sono indipendenti



Si misura un grado di verosimiglianza spaziale da 0 a  $r^*$  in cui  $C_z \rightarrow 0$ .



Si calcola  $C_z(r) = \sigma_z^2 \exp\left[-\frac{r}{I}\right]$

$$\frac{C_z(r)}{\sigma_z^2} = \exp\left[-\frac{r}{I}\right], \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{C_z(r)}{\sigma_z^2}\right) dr = \int_0^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{r}{I}\right]\right) dr = \textcircled{I}$$

MISURA della DISTANZA di CORRELAZIONE di RIFERIMENTO

## SEMIVARIOGRAMMA $\gamma_z(r)$

Il semivariogramma è definito come la differenza tra la varianza e la covarianza nello spazio  $r$ .

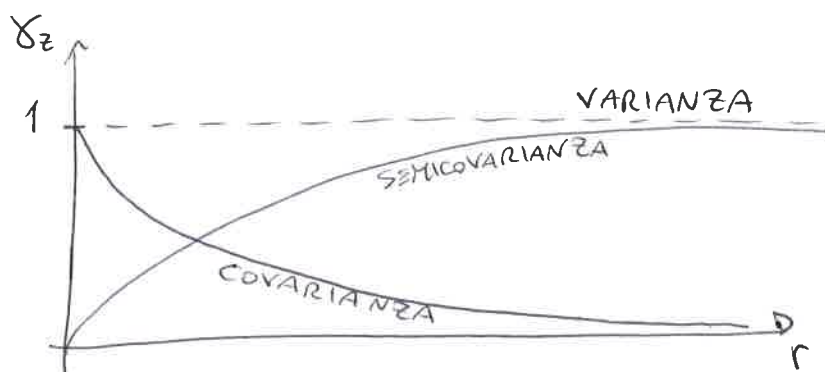
$$\gamma_z(r) = \frac{1}{2} E[(z(x) - z(x+r))^2] \quad \text{"varianza dei dati successivi"}$$

$$= \frac{1}{2} E[(z(x) - E(z)) - (z(x+r) - E(z))]^2]$$

Lo sviluppando il II grado si ha

$$= \frac{E}{2} \left[ \underbrace{(z(x) - E(z))^2}_{\frac{1}{2} \text{ varianza}} + \frac{E}{2} \left[ \underbrace{(z(x+r) - E(z))^2}_{\frac{1}{2} \text{ varianza}} - \underbrace{E[(z(x) - E(z)) \cdot (z(x+r) - E(z))]}_{\text{covarianza}} \right] \right]$$

$$\Rightarrow \gamma_z(r) = \sigma_z^2 - C_z(r)$$



Per definire il grado di verosimiglianza spaziale, in cui  $\gamma_z(r) \rightarrow \sigma_z^2$  e i dati sono indipendenti, esistono vari modelli in funzione dello spazio  $r$ .

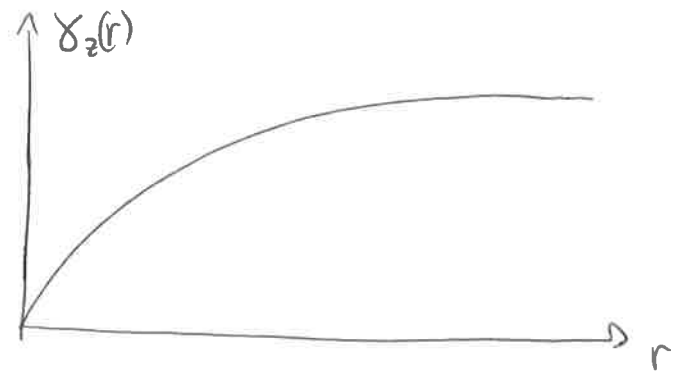
Si introduce la FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE.

$$\boxed{p(r) = 1 - g(r)} \quad \text{in cui} \quad C_z(r) = \sigma_z^2 \cdot p(r)$$

$$g(r) = 1 - \frac{C_z(r)}{\sigma_z^2}$$

# 1. MODELLO del SEMIVARIOGRAMMA

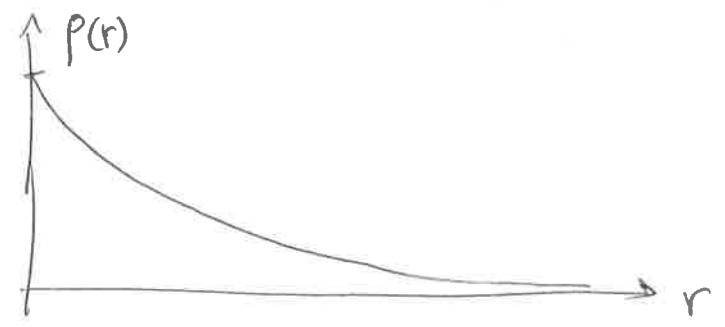
$$\gamma_2(r) = \sigma_2^2 \cdot g(r)$$



# 2. MODELLO ESPONENZIALE

$$g(r) = 1 - \exp\left[-\frac{3r}{\alpha}\right]$$

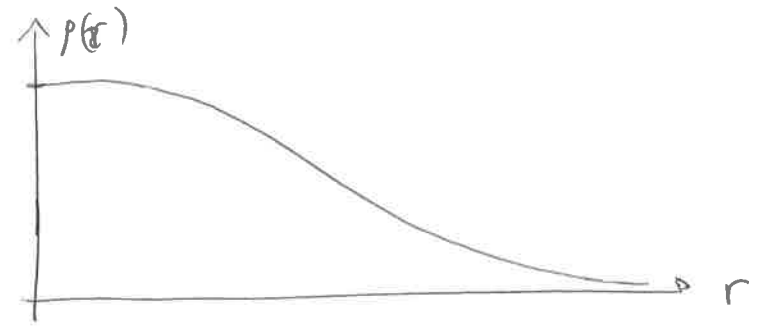
$$p(r) = \exp\left[-\frac{3r}{\alpha}\right] = \exp\left[-\frac{r}{I}\right]$$



# 3. MODELLO GAUSSIANO

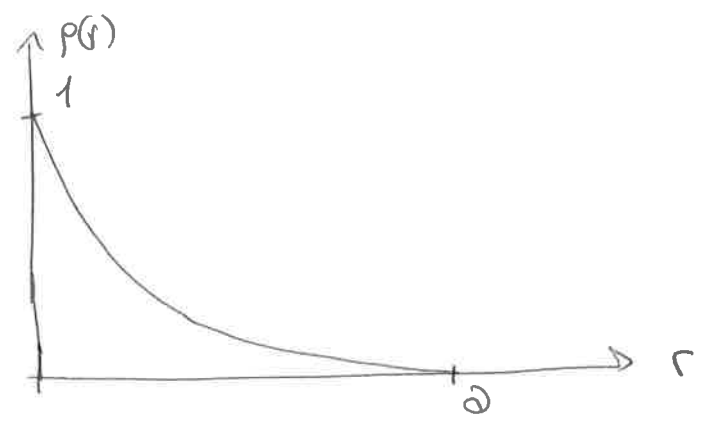
$$g(r) = 1 - \exp\left[-3 \frac{r^2}{\alpha^2}\right]$$

$$p(r) = \exp\left[-3 \frac{r^2}{\alpha^2}\right]$$



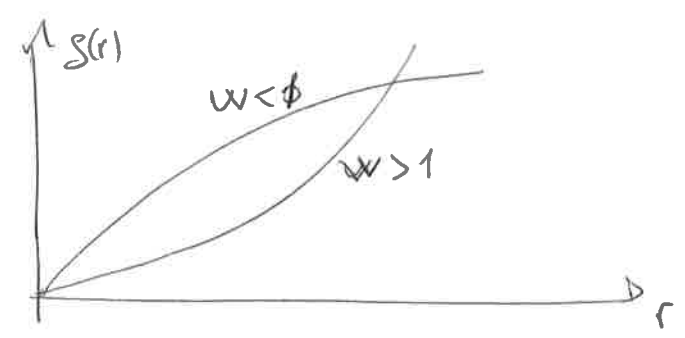
# 4. MODELLO SFERICO

$$p(r) = \begin{cases} 1 - 1,5\left(\frac{r}{\alpha}\right) + 0,5\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3, & r \leq \alpha \\ 0, & r > \alpha \end{cases}$$



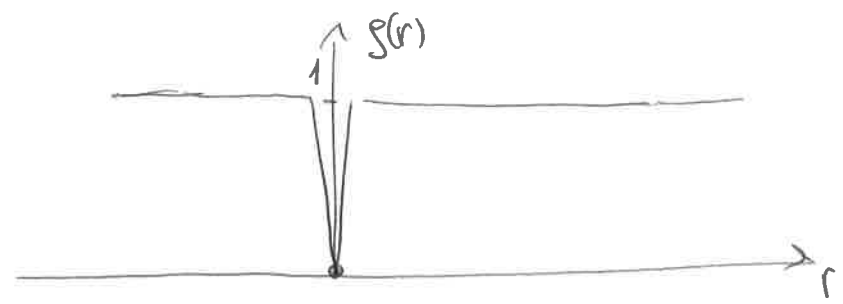
# 5. MODELLO a LEGGE di POTENZA

$$g(r) = r^w, \text{ con } w \in [0, 2]$$



# 6. MODELLO NUGGET

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ c, & r \neq 0 \end{cases}$$

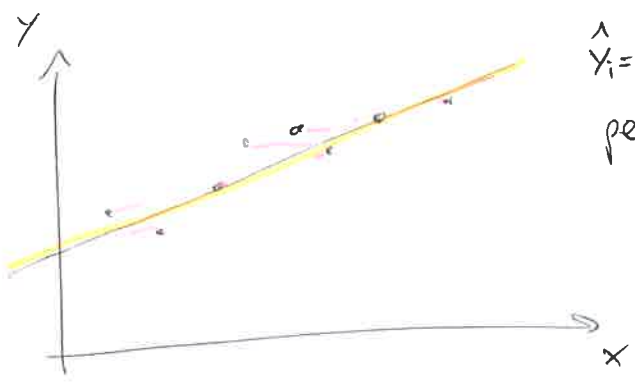


REGRESSIONE LINEARE  $\leadsto$  Linea di tendenza

Dato  $y$  una grandezza da modellare e  $x$  una variabile nota, si ottiene la funzione lineare  $y = ax + b$  dell'osservazione ed il confronto di più dati:  $y = f(x)$ .

Discostamento retta - dati  $\begin{cases} \rightarrow \text{errore di misura} \\ \leftarrow \text{errore del modello} \end{cases}$

Il modello deve essere in grado di passare il più vicino possibile ai dati raccolti



$\hat{y}_i = ax_i + b$   
per  $n$  coppie  $(x_i, y_i)$

R.S.S. Residual Sum of Squares (Somma degli scarti quadratici)  
 $\equiv$  Somma degli scarti tra retta e dati, portata al minimo per ottimizzare il modello.

$RSS = \frac{1}{n-1} \sum_i^n |y_i - \hat{y}_i|^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i^n |y_i - ax_i - b|^2$

derivando per i parametri  $(a, b)$  si ottengono i valori per la retta di modello migliore -

$$\begin{cases} \frac{\partial RSS}{\partial a} = -\frac{2}{n-1} \sum_i^n |y_i - ax_i - b| x_i = 0 \\ \frac{\partial RSS}{\partial b} = -\frac{2}{n-1} \sum_i^n |y_i - ax_i - b| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_i^n y_i - \frac{a}{n} \sum_i^n x_i - b = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_i^n x_i y_i - \frac{a}{n} \sum_i^n x_i^2 - \frac{b}{n} \sum_i^n x_i = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$  si trovano i valori di  $a$  e  $b$  per cui si ottiene il modello  $\hat{y}_i = ax_i + b$  migliore, con RSS minimo

Introducendo  $S_{xy}$  CORRELAZIONE INCROCIATA per cui

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i y_i - \frac{\bar{y}}{n} \sum_i^n x_i - \frac{\bar{x}}{n} \sum_i^n y_i + \bar{x}\bar{y}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \\ S_{xx} = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i^2 - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma_x^2 \text{ varianza di } x \\ S_{yy} = \frac{1}{n} \sum_i^n y_i^2 - \bar{y}^2 \Rightarrow \sigma_y^2 \text{ varianza di } y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y} - a\bar{x} - b = 0 \\ S_{xy} + \bar{x}\bar{y} - a(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) - b\bar{x} = 0 \end{cases} \quad \text{sisteme di RSS minimo}$$

$$\begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ S_{xy} - a\sigma_x^2 = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x}$$

COEFF. DI REGRESSIONE

• ANALISI DELL'ERRORE

dato = modello + errore  
 $T \quad M \quad \varepsilon$

$$\parallel \Rightarrow (y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

ipotesi: la risposta del modello è indipendente dell'errore, quindi ha correlazione nulla

$$2 \sum_i^n (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) = 0$$

Quindi  $SST = SSM + SSE$

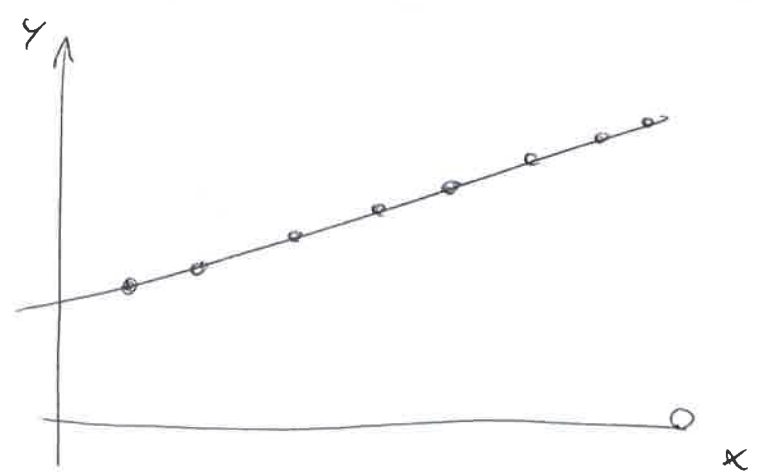
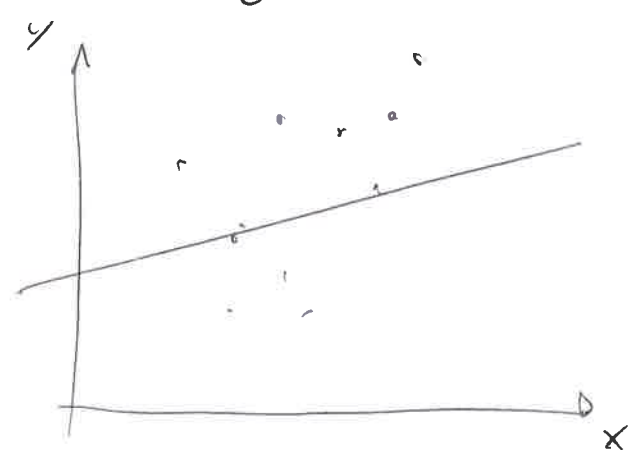
$\text{SST}$  = Somme quadrati Totale  
 $\text{SSM}$  = Somme quadrati modello  
 $\text{SSE}$  = Somme quadrati errore

$\Rightarrow$  COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

$$r^2 = \frac{SSM}{SST} = \frac{\sum_i^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_i^n (y_i - \bar{y})^2}$$

quindi  $0 \leq r^2 \leq 1$

$r^2 \rightarrow 0$  mod. errato       $r^2 \rightarrow 1$  mod. ottimale





5 La valutazione del modello si ha con la TABELLA ANOVA

oggetto	gradi di libertà (DF)	somma quadrati (SS)	medie quadrati (MS)	F
modello $Y = ax + b$ (M)	variabili indipendenti (1)	$\sum_i^n (y_i - \bar{y}_i)^2$	$\frac{SSM}{DFM}$	$\frac{MSM}{MSE}$
errore (E)	dati - paramet. (n-2)	$\sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SSE}{DFE}$	
totale (T)	$DFM + DFE$ (n-1)	$\sum_i^n (\bar{y}_i - \bar{y}_i)^2$	$\frac{SST}{DFT}$	

Dalla tabella si ottiene  $F = \frac{MSM}{MSE} = \frac{\frac{SSM}{DFM}}{\frac{SSE}{DFE}} = \frac{\sum_i^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \cdot (n-2)$

introducendo il LIVELLO di SIGNIFICATIVITÀ  $\alpha \approx 0,05$  (5%)

Si pone un valore F di soglia  $F_{soglia} = INV(\text{Fisher}(0,95; 1; n-2))$   
soglia minima di F del modello per essere accettato.

È una condizione necessaria, ma non sufficiente per un modello ottimale! ⚠

⇒ Si preferiscono modelli con meno gradi di libertà e meno parametri (con più dati) per aver una  $F_{soglia}$  minore, quindi  $F_{modello} > F_{soglia}$ .

La tecnica individua i casì di SOVRAPARAMETRIZZAZIONE, dove un modello vale lo stesso anche se è errato per un numero notevole di parametri e dati.

La COVARIANZA di due variabili aleatorie è un numero che fornisce una misura di quanto le due variano assieme, ovvero la loro dipendenza.

La covarianza di due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  è  $\frac{\text{la differenza}}{\text{il valore atteso}}$  del loro prodotto e il prodotto dei valori attesi.

$$C(X, Y) = E|XY| - E(X) \cdot E(Y)$$

oppure è espressa come il valore atteso dei prodotti delle loro distanze dalla media.

$$C(X, Y) = E|(X - E(X))(Y - E(Y))|$$

In statistica, la REGRESSIONE LINEARE rappresenta un metodo di stima del valore atteso condizionato di una variabile dipendente  $Y$ , dati i valori di una variabile indipendente

$$X_1, X_2, \dots, X_k: E(Y | X_1, X_2, \dots, X_k).$$

L' $R^2$  è il COEFFICIENTE DI REGRESSIONE e misura la bontà dell'adattamento della regressione lineare stimata dai dati osservati.

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y}_0)^2} = \frac{\text{somma scarti quadrati modello}}{\text{somma scarti quadrati totale}} \quad (0 < R^2 < 1)$$

La tabella ANOVA genera in output il parametro test

$$F = \frac{\text{media quadrati modello}}{\text{media quadrati ~~totale~~ errore}}$$

da confrontare col valore soglia del modello Fisher

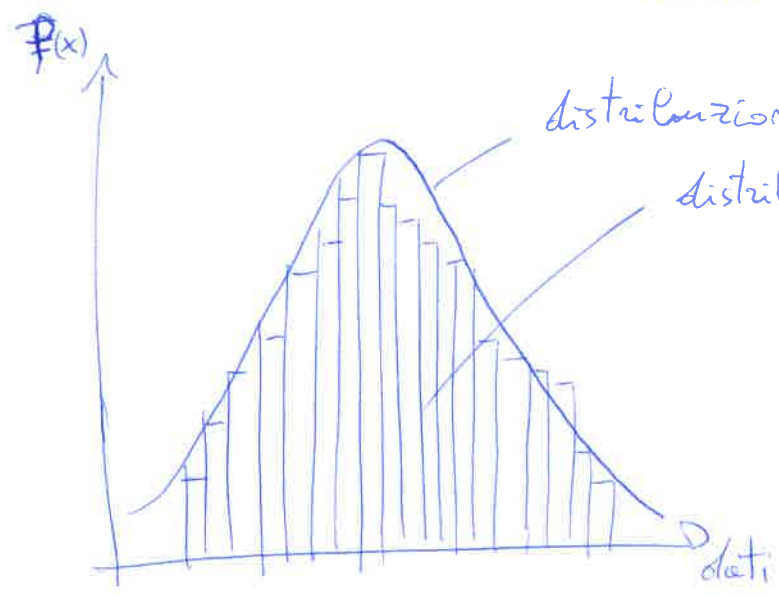
$$F_{\text{soglia}} = \text{INV}(\text{Fisher}(1 - \alpha; 1; n - 2))$$

$$\begin{cases} F < F_{\text{soglia}} & \text{NON accettato} \\ F > F_{\text{soglia}} & \text{accettato } \checkmark \end{cases}$$

5.2

DISTRIBUZIONE  
GAUSSIANA

- distribuzione di probabilità che meglio rappresenta molte variabili biologiche
- distribuzione di probabilità degli errori casuali
- distribuzione di probabilità delle statistiche campionarie
- distribuzione limite per altre distribuzioni quando  $n \rightarrow \infty$



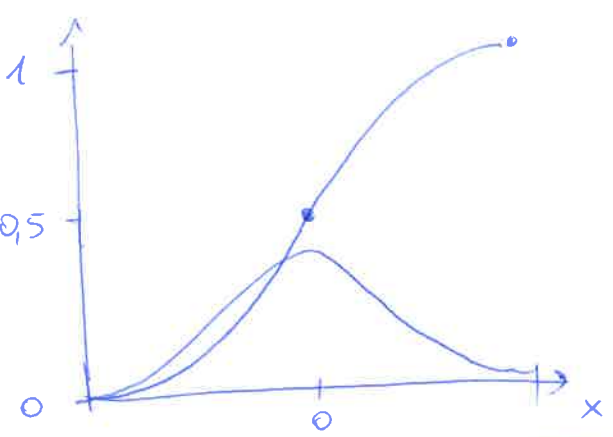
distribuzione di probabilità (teorica)  
distribuzione di frequenza (empirica)

funzione di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

da cui si ricavano i momenti  $\mu, \sigma^2, \mu$

$\mu$  = media  $\rightarrow$  posizione centrale, massimo della curva  
 $\sigma^2$  = ~~varianza~~ <sup>varianza</sup>  $\rightarrow$  ampiezza della curva



Relazione tra funzione di densità di probabilità gaussiana e la corrispondente funzione cumulativa

$$m_1 = 0 = \int x \cdot f(x) dx \quad \rightarrow \quad \mu_k = \int (x - m)^k f(x) dx$$

media  $\mu_1 = \int x f(x) dx \sim$  valore atteso

varianza  $m_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \int (x - \mu_1)^2 f(x) dx$

con  $\mu_2 = \int (x - m)^2 f(x) dx$

Il SEMIVARIOGRAMMA è un metodo geostatistico che viene impiegato per valutare l'autocorrelazione spaziale di dati osservati in punti geografici. Il semivariogramma è la funzione che interpola la semivarianza dei valori osservati in gruppi di coppie di punti a determinate distanze.

La semivarianza è pari a 
$$s(h) = \sum_i^{n(h)} \frac{(z(x_i+h) - z(x_i))^2}{n(h)}$$

in cui  $z$  è il valore di una misura in un particolare punto,  $h$  è una classe di distanze tra punti di misurazione e  $n(h)$  è pari al conteggio del numero di coppie di osservazioni effettuate alla distanza  $h$ . Il semivariogramma è il grafico della semivarianza sulla distanza tra i dati e normalmente viene interpolato con diverse funzioni in modo da determinare la tipologia di autocorrelazione spaziale della variabile misurata.

I parametri stimati sono:

Nugget: descrive il livello di variabilità casuale;

Partial Sill: descrive il livello di variabilità spaziale, ~~che~~ cioè quella porzione di varianza che si osserva in funzione della distanza;

Range: distanza massima alla quale si osserva correlazione spaziale.

VALORE ATTESO  $E|X|$  è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere superato. Ovvero media ponderata dei risultati. Il valore atteso di  $X$  è semplicemente l'integrale di  $X$  rispetto alla misura di probabilità  $P$ .

$$E|X| = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$



## 2. DISTRIBUZIONE ESTREMI

Si definisce un EVENTO ESTREMO un evento poco frequente, con bassa probabilità di accadimento, in relazione al campione di dati raccolto.

Ipotesi: i dati di valori massimi sono tra loro indipendenti.

Ti-

dati  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Portata} \text{ a massima} \\ \text{Volume di piena (h)} \end{array} \right.$

La correlazione è trascurabile ma dipende dalla stagionalità di un evento.

PROBABILITÀ misurate in TEMPO DI RITORNO ( $T_r$ ), ovvero anni in cui un evento estremo accade in media.

Allora dato un evento  $Q^*$ ,  $P(Q^*)$  è la probabilità per cui si ha una portata  $Q^*$ .

PROB. DI SUPERAMENTO  $P(Q^*) \rightarrow P(X \leq x)$

PROB. DI NON SUPERAMENTO  $1 - P(Q^*) \rightarrow P(X \geq x)$

Allora si definisce  $T_r = \frac{1}{P(Q^*)} = \frac{1}{1 - P(X \geq x)}$  come inverso della probabilità di ~~non~~ superamento.

$\Rightarrow$  ne risulta che  $\left\{ \begin{array}{l} T_r \text{ alto} \rightarrow \text{bassa probabilità} \\ T_r \text{ basso} \rightarrow \text{alta probabilità} \end{array} \right.$

Infatti una grande opera richiede  $T_r$  alto, per ridurre il rischio di collasso e cause di un evento estremo.

La probabilità per cui tutte le portate eccedano il valore soglia  $Q^* \in (X)$  è  $P(X \leq x) = e^{-1(1 - P(x))}$  ( $x_0 = \text{soglia}$ )

dove  $P(x) = 1 - \exp\left[-\frac{x - x_0}{k}\right]$  e con  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{k} \\ \lambda = \exp[\alpha(u - x_0)] \end{array} \right.$

$\Rightarrow P(X \leq x) = \exp\left[-\exp\left[-\alpha(x - u)\right]\right]$  detta DISTRIBUZIONE di GUMBEL



analisi della distribuzione di Gumbel con la variabile aleatoria  $Y = \alpha(X - u)$ , quindi diventa

$$P(Y \leq y) = \exp[-\exp[-y]] \quad , \quad \text{con ipotesi } p(x) = p(y) \frac{dy}{dx}$$

la densità di probabilità diventa  $p(y) = e^{-y} e^{-e^{-y}}$

→ media  $\mu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y} e^{-e^{-y}} dy = \Gamma = 0,5772$  NUMERO DI EULERO

→ varianza  $\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [y - \mu(y)]^2 e^{-y} e^{-e^{-y}} dy = \frac{\pi^2}{6}$

ipotesi di analisi dei momenti con

• media  $\mu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x-u) p(x) dx = \alpha (\mu(x) - u)$   $\begin{cases} y = \alpha(x-u) \\ \mu(y) = \int y p(x) dx \end{cases}$

• varianza  $\sigma_y^2 = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(x)]^2 p(x) dx = \alpha^2 \sigma_x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\pi}{\sqrt{6} \sigma_x} = \frac{\pi}{\sqrt{6} S_x} \\ u = \mu(x) - \frac{0,5772 \sqrt{6} \sigma_x}{\pi} \end{cases}$$

parametri della distribuzione

↳ ipotesi di molti dati raccolti  $\begin{cases} \mu(x) \approx \bar{x} \\ \sigma_x^2 \approx S_x^2 \end{cases}$

quindi  $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6} S_x} \\ u = \bar{x} - \frac{0,5772 \cdot \sqrt{6} S_x}{\pi} \end{cases}$

\* l'ipotesi deriva dal "metodo dei momenti" in cui si approssimano i momenti statistici a quelli campionari per ricavare i parametri di distribuzione.

dato che  $P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = \frac{T_r - 1}{T_r}$ , allora

$$\frac{T_r - 1}{T_r} = \exp[-\exp[-\alpha(x-u)]] \quad \text{la funzione di Gumbel}$$

$$X(T_r) = u - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ -\ln \left( \frac{T_r - 1}{T_r} \right) \right]$$

È una PORTATA con  $T_r$  fissato

→ ALTEZZA di PIOGGIA

# Analisi delle altre distribuzioni

I. distribuzione di Gumbel (EV1)

II. distribuzione di Fréchet (EV2)

$$P(X \leq x) = \exp\left[-\left(\frac{u}{x}\right)^2\right]$$

introducendo il coefficiente di variazione

$$CV(x) = \frac{\sigma_x^2}{\mu(x)} \approx \frac{S_x^2}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\Gamma(1-\frac{2}{\eta})}{\Gamma(1-\frac{1}{\eta})^2} - 1}, \text{ con } u = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1-\frac{1}{\eta})}$$

III. distribuzione GEV

$$P(X \leq x) = \exp\left[-\left[1 - \frac{k}{\alpha}(x-u)\right]^{1/k}\right] \quad \text{secondo i parametri } (\alpha, u \text{ e } k)$$

ipotesi di  $k \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{EV1} \\ < 0 \rightarrow \text{EV2} \end{cases}$

$$\text{mentre } \begin{cases} \alpha = \left[ \frac{k^2 S_x^2}{\Gamma(1+2k) - \Gamma(1+k)^2} \right]^{1/2} \\ u = \bar{x} - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \end{cases}$$

IV. distribuzione TC EV

individua gli ambiti Territoriali a cui attribuire la distribuzione degli eventi estremi relativa di riferimento.

=> Regionalizzazione del territorio

$$P(X \leq x) = \exp\left[-\left[\lambda_1 \exp\left(\frac{-x}{\theta_1}\right) + \lambda_2 \exp\left(\frac{-x}{\theta_2}\right)\right]\right]$$

con i 4 parametri  $(\lambda_1, \theta_1, \lambda_2, \theta_2)$ , si amplifica l'errore con scarsa affidabilità, ma definisce meglio una sottoregione rispetto alla regione complessiva.

i- sottoregione



## V. distribuzione gamma ( $\gamma$ )

$$P(X \leq x) = \frac{T_1(x, \gamma)}{T(\gamma)}$$

rapporto di due funzioni  $T$  dipen-  
denti dai parametri  $(x, \gamma)$

$$= \frac{\int_0^x e^{-t} t^{\gamma-1} dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt}$$

con  $\begin{cases} \alpha = \frac{\mu(x)}{\sigma_x^2} \approx \frac{\bar{x}}{S_x^2} \\ \gamma = \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} \end{cases}$

## VI. distribuzione Log-normale

VI.A. per 2 parametri, con  $p(x) = p(y) \frac{dy}{dx}$  e  $y = \ln(x)$

ipotesi:  $P\left(x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}\right) = P\left(y - \frac{dy}{2} \leq Y \leq y + \frac{dy}{2}\right)$

$$p(x) = p(y) \frac{1}{x} = \frac{1}{x \sqrt{2\pi} \sigma_y^2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x) - \mu(y))^2}{\sigma_y^2}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{media } \mu(y) = \ln(\mu(x)) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{(\mu(x))^2}\right) \\ \text{varianza } \sigma_y^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{(\mu(x))^2}\right) \end{cases}$$

VI.B. per 3 parametri, con la soglia  $x_0$ ,  $y = \ln(x - x_0)$   
si utilizzano molti parametri correlati, amplificando un  
qualsiasi piccolo ~~valore~~ errore.

dati  $\phi = \frac{\mu_3(x)}{2 \sigma_x^3}$  e  $\psi = \sqrt{\frac{\mu_3(x)^2}{9 \sigma_x^6} + 1}$

si definisce  $t = [\phi + \psi]^{1/3}$

quindi i parametri sono  $\begin{cases} \sigma = \left(\ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{(\mu(x) - x_0)^2}\right)\right)^{-1/2} \\ b = \frac{1}{2\sigma} - \sigma \ln(\mu(x) - x_0) \\ x_0 = \mu(x) - \frac{\sigma_x}{t} \end{cases}$

per la densità data come

$$p(x) = \frac{1}{(x - x_0) \sqrt{2\pi} \sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y - b)^2}{\sigma^2}\right]$$

8 METODI DI STIMA Per determinare i parametri  $a, b$  utili a definire il modello della regressione dei dati raccolti.

1. METODO DEI MOMENTI

La relazione tra i parametri e i momenti del I e II ordine è

$$\begin{cases} \mu = a + b\gamma \\ \sigma_x^2 = b^2 \frac{\pi^2}{6} \end{cases}, \text{ con } \gamma = \text{cost. di Euler} = 0,5772$$

$$\begin{cases} \mu(y) = \gamma \\ \sigma_y^2 = \frac{\pi^2}{6} \end{cases}$$

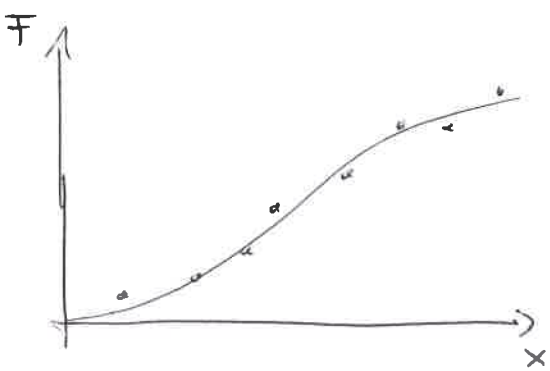
si approssima ai momenti campionari

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i = a + b\gamma \\ \sigma_x^2 \rightarrow S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = b^2 \frac{\pi^2}{6} \end{cases}$$

da cui si ricavano i parametri  $(a, b)$

2. METODO DEI MINIMI QUADRATI

Con i dati raccolti in ordine crescente,  $\frac{i}{n+1}$  rappresenta la funzione di dati  $F$  al variare delle  $i$ -esime  $x$ .

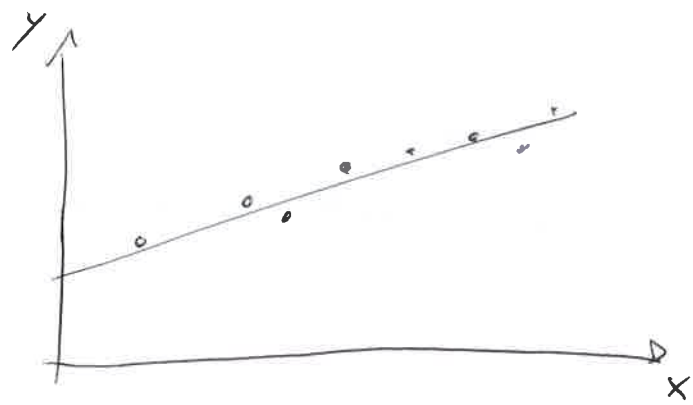


la funzione della somma dei quadrati è minimizzata

$$\min \text{RSS} = \sum_i^n [P(X \leq x_i) - F(x_i)]^2$$

$$y_i = -\ln\left[-\ln\left(\frac{i}{n+1}\right)\right]$$

con cui ottenere la retta di regressione  $y = \alpha(x - u)$



ricavandone i parametri  $(a, b)$  della sua definizione

$$y = a + bx$$

### 3. METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Con i dati raccolti in ordine crescente, si valutano i parametri in grado di massimizzare la probabilità di trovare i valori più prossimi ai dati campionati.

$$P(a, b | \{h_1, h_2, \dots, h_N\}) = \frac{\prod_{i=1}^N P[h_i | a, b]}{P(\{h_1, h_2, \dots, h_N\})} p(a, b)$$

Se la distribuzione è

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right]$$

la funzione  $L$  da massimizzare è

$$L = \sum_i \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x_i - b)^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_i \frac{(x_i - b)^2}{2\sigma^2}$$

derivato per i parametri  $(a, b)$ :

coincide col massimo della produttoria  $\Pi$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{4\pi\sigma^2} - \frac{1}{2} \sum_i (x_i - b)^2 \sigma^{-2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2 \sum_i \frac{(x_i - b)}{\sigma^2} = 0$$

ricavando proprio la definizione

$$b \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

$$\sigma^2 \rightarrow S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

\* Nella distribuzione di Gumbel si procede grazie al metodo di Newton per trovare lo zero della funzione di primo tentativo, poi con le serie di Taylor:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

Nel caso pluridimensionale si applica la matrice

Jacobiana  $J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x} = \vec{x}^n}$  come derivata della funzione:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - [J(\vec{x}^n)]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}^n)$$

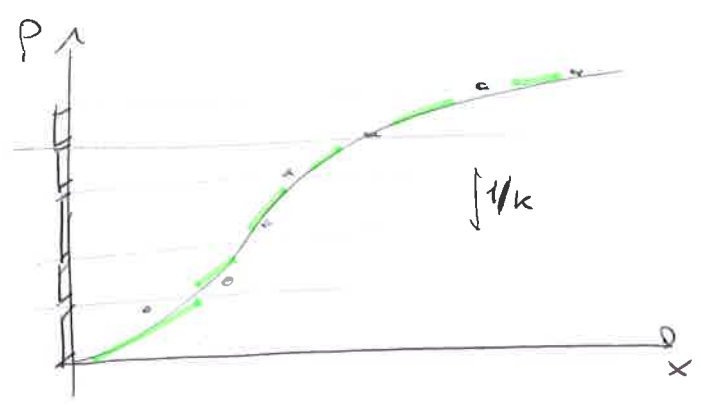


### TEST di VERIFICA

Avendo implementato tutti e tre i metodi, bisogna scegliere quale coppia di parametri (a,b) sia in grado di rappresentare meglio il fenomeno.

### TEST di Pearson ( $\chi^2$ )

ordinando i dati, si classificano in  $p_i$  classi ampie  $\frac{1}{k}$ .



la variabile principale è

$$\chi^2 = \sum_i^k \frac{(N_i - n \cdot p_i)^2}{n p_i}$$

differenziando  $N_i$  dati per ogni classe  
[ $n p_i$  = num. eventi attesi nella classe]

noto che  $x = a - \frac{1}{\alpha} \ln[-\ln(P(X \leq x))]$

si studiano i gradi di libertà  $\nu = k - s - 1$  (= classi - parametri - 1)

con cui valutare l'andamento

$$P_{\chi^2}(\theta) = \frac{2^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \theta^{\nu/2-1} \cdot e^{-\theta/2}, \text{ con } \theta > 0$$

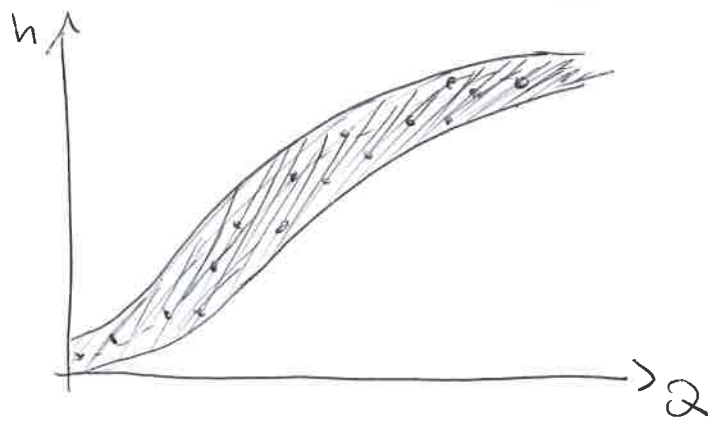
Bisogna valutare il livello di significatività  $\alpha$  aumentando la sicurezza nel metodo scelto.

l'ipotesi di  $\alpha = 5\% = 0,05$  significa determinare  $\chi^2$

$$P(\chi^2) = \int_0^{\chi^2} P_{\chi^2}(\theta) d\theta = 1 - \alpha = 0,95$$

per cui si accettano i valori  $\tilde{\chi}^2 < \chi^2_c$

→ Analisi dell'intervallo di confidenza



ovvero la fascia circostante la curva contenente i dati campionati

Nella distribuzione di Gumbel  $P(X \leq x) = \exp[-\exp[-\alpha(x-u)]]$

ipotesi delle variabile  $y = \alpha(x-u)$

$$P(X \leq x) = \exp[-\exp[-y]] \quad \text{e } p(x) = p(y) \frac{dy}{dx} \alpha$$

allora  $p(x) = \alpha \exp[-y] \cdot \exp[-\exp[-y]]$

La funzione da massimizzare per il metodo della massima verosimiglianza è

$$L = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i, \alpha, u) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \alpha - \alpha(x_i - u) - \exp(-\alpha(x_i - u)) \right\} = \\ = n \ln \alpha - \alpha \sum_{i=1}^n (x_i - u) - \sum_{i=1}^n \exp(-\alpha(x_i - u))$$

derivando in  $\alpha, b$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n (x_i - u) + \sum_{i=1}^n ((x_i - u) \exp(-\alpha(x_i - u))) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \alpha n - \sum_{i=1}^n \alpha \cdot \exp(-\alpha(x_i - u)) = 0 \end{cases}$$

Il sistema è non lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} - \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \exp(-\alpha(x_i - u))) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (\exp(-\alpha(x_i - u))) = n \end{cases}$$

⇒ metodo di Newton per azzerare la funzione L

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

- DISTRIBUZIONI
- Gumbel EV1 →  $f(\alpha, u)$
  - Fréchet EV2 →  $f(u, \eta)$
  - GEV →  $f(\alpha, u, \kappa)$
  - TCEV →  $f(\lambda_1, \theta_1, \lambda_2, \theta_2)$
  - Gamma →  $f(\gamma, \delta)$
  - Log-normale
    - 2 param.  $f(a, b)$
    - 3 param.  $f(a, b, x_0)$

8.2

In statistica il TEMPO DI RITORNO di un evento è il tempo medio intercorrente tra il verificarsi di due eventi successivi di entità uguale o superiore ad un valore di assegnata intensità.

Per ragioni di comodità di rappresentazione, è utilizzato in sostituzione del concetto di probabilità di non superamento associato ad un certo evento naturale. Infatti gran parte delle grandezze che governano i fenomeni naturali sono aleatorie e quindi descrivibili attraverso variabili casuali continue da studiare con i metodi probabilistici. Mediante tali metodi è possibile individuare la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta il fenomeno naturale così da poter associare ad ogni valore che la grandezza può assumere la relativa frequenza con cui questa si verifica. Consideriamo una serie di osservazioni effettuate su una ~~grandezza~~ ~~grandezza~~ grandezza naturale  $x$ ; la probabilità che un evento  $X$  risulti maggiore di un valore prefissato  $x_T$  in un certo lasso di tempo è pari a:

$$P = P(X \geq x_T)$$

Il tempo di ritorno medio  $T$  associato a  $x$  esprime il numero medio di osservazioni necessarie affinché un dato evento si verifichi nuovamente.

$T$  è pari all'inverso della probabilità  $P = \left(T = \frac{1}{P}\right)$ , questa significa che fissare un tempo di ritorno è equivalente a fissare un valore di probabilità.  $P = \frac{1}{T}$ .

Se la variabile casuale è un valore massimo annuale, il tempo di ritorno  $T$  si misura in anni.

Un tempo di ritorno più lungo indica un evento più raro; la probabilità di un evento estremo di verificarsi in un lasso di  $N$  anni è:

$$P = \left(\frac{1}{T}\right)^N$$

Nell'ingegneria idraulica, per la progettazione di alcune opere strettamente connesse agli eventi atmosferici, la scelta del tempo di ritorno di evento è un parametro fondamentale.

Dipende da fattori quali

- estensione bacino di drenaggio
- importanza opere
- rischio di superamento

In merito a quest'ultimo risulta evidente che l'evento critico deve essere prescelto anche valutando il danno che il suo superamento può causare a cose e/o persone. Il rischio è classificato in funzione del danno:

R1 = moderato

R2 = moderato

R3 = elevato

R4 = molto elevato

Consideriamo un'opera idraulica dimensionata per un evento meteorologico  $x(T)$  di  $T$  anni di tempo di ritorno; il rischio si esprime  $R[x(T)] = 1 - (1 - \frac{1}{T})^N$  ( $N$  = vita utile)

A questo punto bisogna scegliere idoneamente  $T$  in modo tale che il rischio sia commisurato ai possibili danni causati da eventi maggiori di quello di progetto ma considerando anche che l'evento di progetto che ne deriva deve determinare un dimensionamento dell'opera idraulica tecnicamente ed economicamente accettabile.

• DISTRIBUZIONE di GUMBEL

$$P(X \leq x) = \exp[-\exp[-\alpha(x-u)]]$$

Per cui tutte le portate eccedano il valore soglia  $X$ .



Il test di Pearson  $\chi^2$  è un test non parametrico applicato a grandi campioni quando si è in presenza di variabili nominali e si vuole verificare se il campione è stato estratto da una popolazione con una predeterminata distribuzione o che due o più campioni derivino dalla stessa popolazione.

• TEST della BONTÀ di ADATTAMENTO

Utilizza i dati di un solo campione e verifica l'ipotesi nulla che il campione sia stato estratto da una popolazione di cui è nota la distribuzione.

Sia  ~~$\chi^2$~~   $\chi^2 = \sum_i^g \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_i^g \frac{n_i^2}{E_i} - n$  (i = modalità)

con  $n = \sum_i^g n_i = \sum_i^g E_i$  numerosità campione

$n_i$  = num. casi osservati nel campione per la i-esima modalità.

$E_i$  = num. casi attesi se l'ipotesi nulla fosse vera.

⇒  $\chi^2$  è distribuita approssimativamente come una variabile casuale  $\chi^2$  con  $(g-1)$  gradi di libertà  $\chi^2_{g-1}$ . Si richiede che tutte le frequenze attese  $E_i$  raggiungano un valore minimo (almeno pari a 5).

• TEST per K CAMPIONI INDIPENDENTI

Verifica l'ipotesi nulla che k campioni siano indipendenti e derivino dalla stessa popolazione.

Sia  $\chi^2 = \sum_i^g \sum_j^k \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_i^g \sum_j^k \frac{n_{ij}^2}{E_{ij}} - n$  (i = modalità, j = campione)

con  $n = \sum_i^g \sum_j^k n_{ij} = \sum_i^g \sum_j^k E_{ij}$  numerosità campioni insieme

$n_{ij}$  = num. casi campione j per la i-esima modalità

$E_{ij}$  = num. casi attesi del campione j per la i-esima modalità se l'ipotesi nulla fosse vera.



Per indipendenza dei campioni  $E_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{n}$

con  $\begin{cases} n_j = \sum_i n_{ij} & \text{frequenza marginale per modalit\`a} \\ n_i = \sum_j n_{ij} & \text{numerosit\`a ciascun campione} \end{cases}$

Allora, se i campioni sono sufficientemente grandi, e le modalit\`a tali che tutti gli  $e_{ij}$  non sono troppo piccoli (almeno 5), la variabile test  $\chi^2$  \u00e8 distribuita come una variabile casuale  $\chi^2$  con  $(g-1)(k-1)$  gradi di libert\`a  $\chi^2_{(g-1)(k-1)}$ .

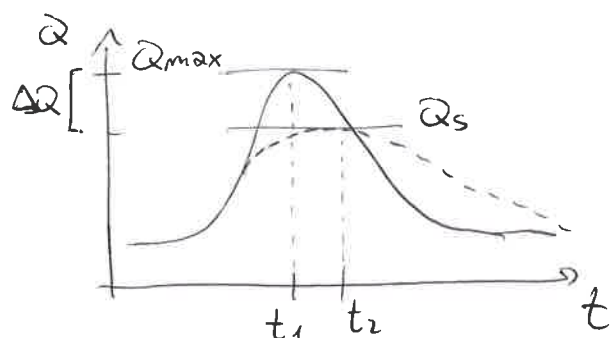
$\rightarrow \chi^2$  \u00e8 la distribuzione di probabilit\`a delle somme dei quadrati di variabili aleatorie normali indipendenti.

$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2$  somma delle variabili aleatorie

indipendenti con distribuzione normale standard. Il parametro  $k$  \u00e8 detto numero di gradi di libert\`a.

### 3. DATI PIOGGIA

La modellazione dei dati pioggia prevede l'identificazione della piena di progetto che analizza l'evoluzione dell'evento estremo.



Grazie allo STORATORE l'ondata di piena ha un massimo minore e ritardato ( $Q_s$ ).

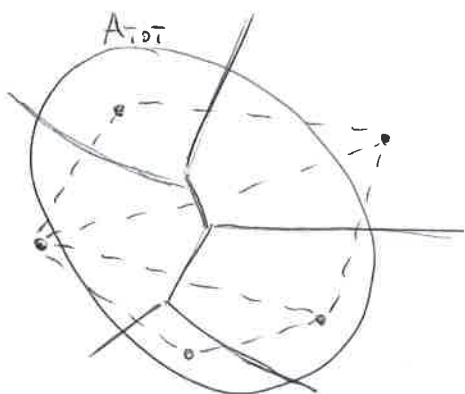
↳ Fenomeno della **LAMINAZIONE**

- PRIMA FASE: **DISTRIBUZIONE SPAZIALE** con le forzanti meteo, parametri di altezza di pioggia nel tempo.

↳ distribuzione delle informazioni delle misure puntuali in aree di bacino.

#### **METODI**

1. **metodi dei Topografi** per triangolazione dei sottobacini.



→ assegnare un valore preciso a tutta l'area  $A_i$  del sottobacino oppure

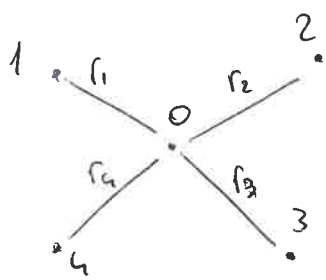
→ ricavare un valore unico dell'area totale  $A_{tot}$  per una media pesata dei sottobacini.

$$\bar{h} = \sum_i w_i A_i \Rightarrow \sum_i \frac{A_i}{\sum_i A_i} \cdot h_i \quad \text{pioggia media}$$

Si ha una buona stima per pochi valori di misura, all'aumentare dei punti di misura si utilizzano metodi migliori.

Metodo del poligono di Thiessen: si assume che l'altezza di precipitazione in ciascuno punto del bacino sia uguale a quella misurata nel pluviometro più vicino al punto ~~in~~ in esame. Di conseguenza il peso attribuito al pluviometro  $i$ -esimo è pari alla porzione di area del bacino che risulta più prossima ad esso, diviso l'area complessiva.

2. metodo dell'inverso della distanza (IDW) stima il valore della variabile in un punto senza misure ( $z$ ) con l'interpolazione.

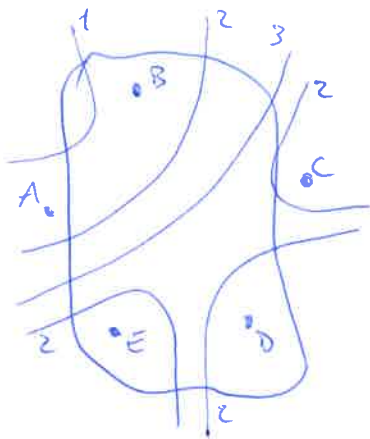


$$z^*(x) = \frac{1}{\sum_i r(x; x_i)^p} \sum_i \frac{z(x_i)}{r(x; x_i)^p}$$

la variabile  $z^*$  è stimata con una media pesata alle distanze relative.

Il metodo si basa sull'ipotesi che in ciascun punto del bacino la precipitazione possa essere stimata sulla base di tutte le precipitazioni misurate, attribuendo ad esse un peso pari all'inverso della distanza tra il punto e la stazione pluviometrica.

+ Il metodo delle isoiete vede le ~~iso~~ curve di iso-precipitazione sono stimate dai valori misurati nei singoli pluviometri



con tecniche numeriche di diverso tipo o graficamente secondo l'esperienza dell'operatore. Una volta tracciate le curve di livello si attribuisce all'area compresa tra due curve il rispettivo valore medio. I valori di  $P_i$  sono i valori medi tra due isoiete limitrofe.

### 3. Interpolatori geostatistici → KRIGING

ipotesi: punti stimati con funzione aleatoria

↳ fluttuazione  $z^*(x) - m(x) = \sum_i^n \lambda_i(x) [z(x_i) - m(x_i)]$

quindi i metodi geostatistici differiscono solo dalla media -

#### I SIMPLE KRIGING $m(x) = m$ costante e note

allora  $z_{sk}^*(x) = \sum_i^n \lambda_i^{sk}(x) [z(x_i) - m(x_i)] + mm$

il valore atteso si annulla con

$$E \left\{ m \sum_i^n \lambda_i^{sk}(x) + m - m \sum_i^n \lambda_i^{sk}(x) - m \right\} = 0$$

I parametri derivano dalle II condizione della varianza:

minimizzando  $\sigma_E^2 = E \left\{ \left[ \sum_i^n \lambda_i(x) R(x_i) - R(x) \right]^2 \right\}$  (varianza errore)

$$\text{min} = \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i^{sk}(x) \lambda_j^{sk}(x) C_R(x_i; x_j) + \sigma_R^2 - 2 \sum_i^n \lambda_i^{sk}(x) \cdot C_R(x; x_i)$$

per i parametri  $\lambda_i^{sk}$  e  $\lambda_j^{sk}$ .

#### II ORDINARY KRIGING $m(x) = m$ costante ma ignote

allora  $z_{ok}^*(x) = \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) \cdot z(x_i)$

il valore atteso si annulla con

$$E \left\{ \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) \cdot z(x_i) - z(x) \right\} = 0$$

la prima condizione è:  $\sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) = 1$

la seconda condizione dalla varianza dell'errore:

$$\sigma_E^2(x) = E \left\{ \left[ z_{ok}^*(x) - z(x) \right]^2 \right\}$$

$$\text{min} = \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i^{ok}(x) \lambda_j^{ok}(x) C_R(x_i; x_j) + \sigma_R^2 - 2 \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) \cdot C_R(x; x_i)$$

Per numero di incognite elevato si usano i moltiplicatori

di Lagrange  $\sigma_E^2 \neq 2 \mu_{ok}(x) \left[ \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) - 1 \right]$

Il sistema diventa  
per le  
condizioni  
(lineare)

$$\begin{cases} \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) = 1 \\ \sum_i^n \lambda_i^{ok}(x) \cdot C_R(x_i; x_j) + \mu_{ok}(x) = C_R(x; x_j) \end{cases}$$



Il semivariogramma di  $Z \rightarrow$  il semivariogramma di  $R$

$$\gamma_Z(x_i; x_j) = \frac{E}{2} \left\{ [z(x_i) - z(x_j)]^2 \right\} = \frac{E}{2} \left\{ [R(x_i) + m(x_i) - R(x_j) - m(x_j)]^2 \right\}$$

$\rightarrow$  varianza dell'errore in funzione della covarianza

$$\sigma_E^2 \begin{cases} \rightarrow = \sigma_R^2 - \sum_i \lambda_i^{OK}(x_0) \cdot C_R(x_i; x) - \mu_{OK}(x) \\ \rightarrow = \sum_i \lambda_i^{OK}(x) \cdot \gamma(x_i; x) - \mu_{OK}(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  nei punti di misura certi, le medie  $\mu_{OK}$  e  $\mu_{SK}$  coincidono col valore esatto;

Mentre tra le misure  $s_{iK}$  tende al valor medio generale,  $O.K.$  tende alla media locale.

Confronto Metodi: CROSS VALIDATION

Valuta la validità dei dati, Toglie un punto casuale dall'insieme di misure per ipotesi, stimando le altre misure  $(n-1)$ .

$\hookrightarrow$  l'interpolazione ottenuta è una stima di quella completa. Si confrontano gli errori  $E$  dei modelli  $i$ -esimi.

STIMA - MISURA  $\rightarrow \epsilon_i = z^*(x_i) - z(x_i); \quad i = 1, \dots, n$

Valutare interpolatore con  $E$  minore  $\rightarrow |\bar{E}| = \frac{1}{n} \sum_i |\epsilon_i|$

$$\rightarrow \sigma_E^2 = \frac{1}{n} \sum_i (\epsilon_i - \bar{E})^2$$

### III KRIGING con DRIFT ESTERNO

$$m(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) Y(x)$$

lineare da funzione incognite

I momenti sono  $\begin{cases} E \{ [z_{k \in D}^*(x) - z(x)] \} = 0 \\ \sigma_E^2 = E \{ [z_{k \in D}^*(x) - z(x)]^2 \} \rightarrow \text{minimo} \end{cases}$

$$\hookrightarrow \alpha_0(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{k \in D}(x) - 1 \right] + \alpha_1(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{k \in D}(x) \cdot Y(x_i) - Y(x) \right] = 0$$

condizioni  $\begin{cases} \sum_i \lambda_i^{k \in D}(x) = 1 \\ \sum_i \lambda_i^{k \in D}(x) \cdot Y(x_i) - Y(x) = 0 \end{cases}$



Il KRIGING è un metodo di regressione usato nell'ambito dell'analisi spaziale (geostatistica) che permette di interpolare una grandezza nello spazio, minimizzando l'errore quadratico medio.

Conoscendo il valore di una grandezza in alcuni punti nello spazio, possiamo determinare il valore della grandezza in altri punti per i quali non esistono misure, per esempio una località di campagna sprovvista di misuratori.

Nel Kriging, questa interpolazione spaziale si basa sull'autocorrelazione della grandezza, cioè l'assunto che una grandezza in oggetto vari nello spazio con continuità; detto in parole più semplici "le cose più vicine sono più simili alle cose più lontane". Il valore incognito in un punto viene calcolato con una media pesata dei valori noti.

I pesi che vengono dati alle misure note dipendono dalla relazione spaziale tra i valori misurati nell'intorno del punto incognito. Per calcolare i pesi si usa il semivariogramma, un grafico che mette in relazione la distanza tra due punti e il valore di semivarianza tra le misure effettuate in questi due punti. Il semivariogramma espone, sia in maniera qualitativa che quantitativa, il grado di dipendenza spaziale, che altro non è che l'autocorrelazione vista prima.

\* La geostatistica si occupa di valutare l'autocorrelazione spaziale dei dati, cercando di verificare se osservazioni effettuate in punti vicini presentano effettivamente una maggiore correlazione rispetto ad osservazioni in punti più distanti.

## INTERPOLAZIONE del DTM:

L'approccio utilizzato sarà quello della geostatistica variogram based: partendo dall'analisi dei dati e dall'interpretazione del variogramma si calcherà la superficie interpolante da confrontare col DTM "ufficiale".

Il Regression Kriging indica un'analisi esplorativa dei dati per l'indagine e la quantificazione di un modello di dipendenza della variabile dipendente con una o più variabili dipendenti.

Nell'analisi del modello spaziale si può partire dall'ipotesi "zero" ovvero che non esista alcun legame tra la variabile dipendente ed eventuali coordinate. La scelta allora passa direttamente all'analisi della correlazione spaziale dei dati e alla scelta di applicare la tecnica statistica del simple kriging o dell'ordinary kriging.

Il modello 1 lega la variabile dipendente con le variabili indipendenti e quantifica varianza e correlazione dei dati stessi.

Il modello 2 ottiene un valore di regressione lineare migliore, creando la dipendenza con le coordinate.

---

I valori della superficie interpolante in corrispondenza dei punti di misura assumono SEMPRE il valore della misura.

11.3

Matrici Kriging

$$C \cdot \Lambda = T$$

covarianza = pesi = note

SK

$$C = \begin{bmatrix} C_R(x_1, x_1) & C_R(x_1, x_2) & \dots & C_R(x_1, x_n) \\ C_R(x_2, x_1) & C_R(x_2, x_2) & \dots & C_R(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_R(x_n, x_1) & C_R(x_n, x_2) & \dots & C_R(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$T = [C_R(x, x_1) \quad C_R(x, x_2) \quad \dots \quad C_R(x, x_n)]$$

OK

$$C = \begin{bmatrix} C_R(x_1, x_1) & C_R(x_1, x_2) & \dots & C_R(x_1, x_n) & 1 \\ C_R(x_2, x_1) & C_R(x_2, x_2) & \dots & C_R(x_2, x_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_R(x_n, x_1) & C_R(x_n, x_2) & \dots & C_R(x_n, x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_0 \end{bmatrix}$$

$$T = [C_R(x_0, x_1) \quad C_R(x, x_2) \quad \dots \quad C_R(x, x_n) \quad 1]$$

$K \equiv D$

$$C = \begin{bmatrix} C_R(x_1, x_1) & C_R(x_1, x_2) & \dots & C_R(x_1, x_n) & 1 & Y(x_1) \\ C_R(x_2, x_1) & C_R(x_2, x_2) & \dots & C_R(x_2, x_n) & 1 & Y(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_R(x_n, x_1) & C_R(x_n, x_2) & \dots & C_R(x_n, x_n) & 1 & Y(x_n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ Y(x_1) & Y(x_2) & \dots & Y(x_n) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

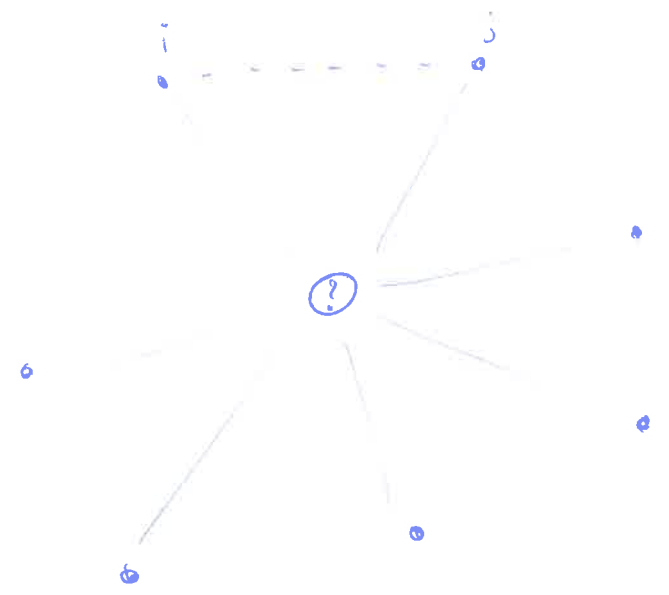
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = [C_R(x, x_1) \ C_R(x, x_2) \ \dots \ C_R(x, x_n) \ 1 \ Y(x)]$$

SK  
 $m(x) = m$

OK  
 $m(x) = m ?$

$K \equiv D$   
 $m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 Y(x)$



$$z^*(x) - \underbrace{m(x)}_{\text{punto incognito}} = \sum_i \lambda_i(x) [z(x_i) - m(x_i)]$$

punti di misura

$$\left\{ \begin{aligned} \min E \left\{ \left[ \sum_i \lambda_i(x) R(x_i) - R(x) \right]^2 \right\} = \\ \pm \sum_i \sum_j \lambda_i(x) \lambda_j(x) C_R(x_i, x_j) + \sigma_R^2(x) - 2 \sum_i \lambda_i C_R(x, x_i) \\ \Delta \sum_i \lambda_i(x) = 1 \end{aligned} \right.$$



La funzione di Lagrange si pone

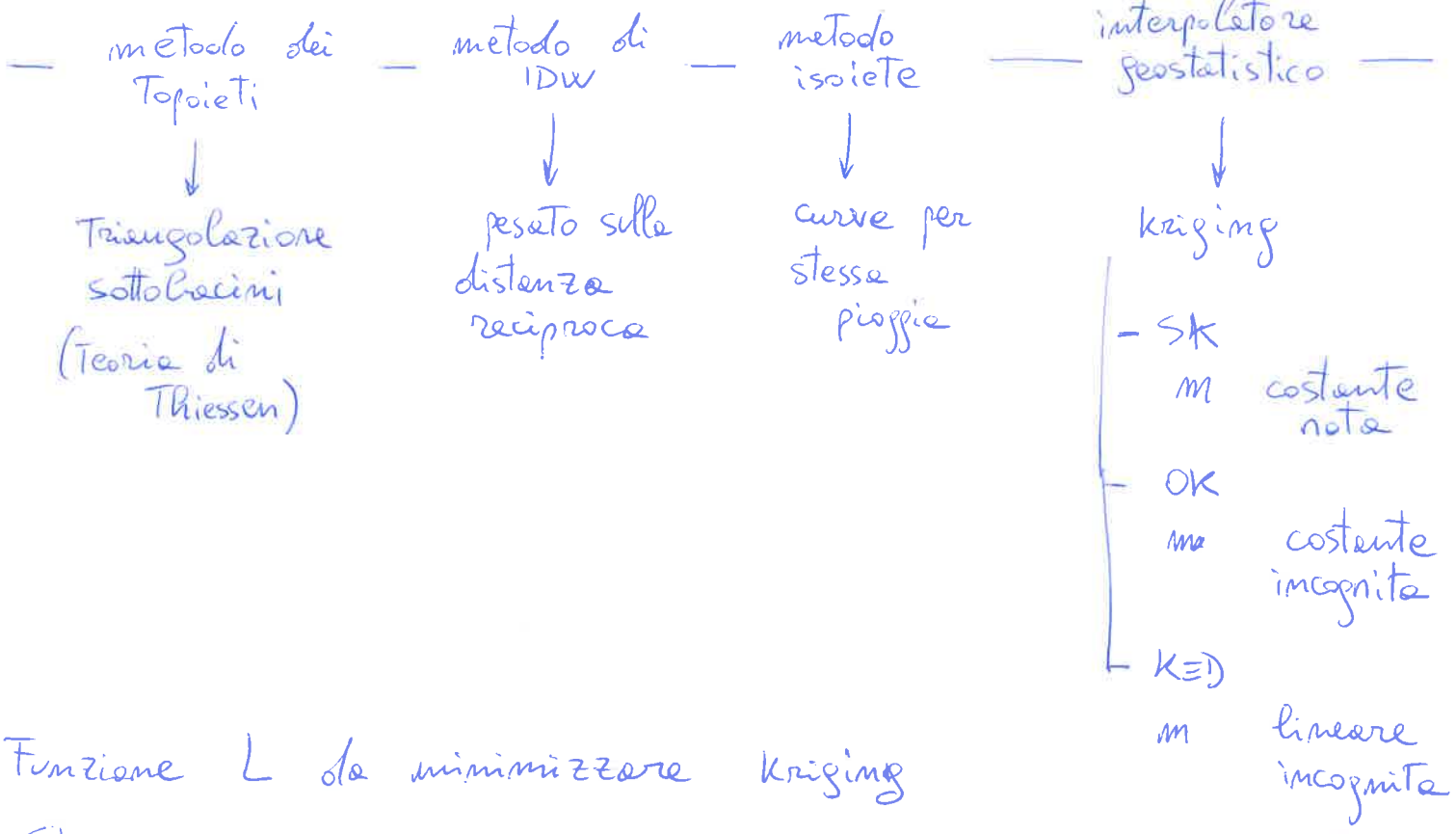
$$L = \sigma_\epsilon^2 + 2\mu_0(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{KED}(x) - 1 \right] + 2\mu_1(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{KED}(x) \cdot Y(x_i) - Y(x) \right]$$

ovvero l'espressione lineare dell'ordinary kriging -  
=> usato per un'alta densita di punti di misura,

ipotesi:

- la precipitazione e costante in ogni sottobacino;
- ogni stazione e nota l'andamento dell'onda di piena;
- sono note le coordinate spaziali delle stazioni.

### METODI DISTRIBUZIONE PIOGGE



Funzione L da minimizzare kriging

S.K.

$$\sum_i \sum_j \lambda_i^{SK}(x) \lambda_j^{SK}(x) \cdot C_R(x_i; x_j) + \sigma_R^2 - 2 \sum_i \lambda_i^{SK}(x) \cdot C_R(x; x_i)$$

O.K.

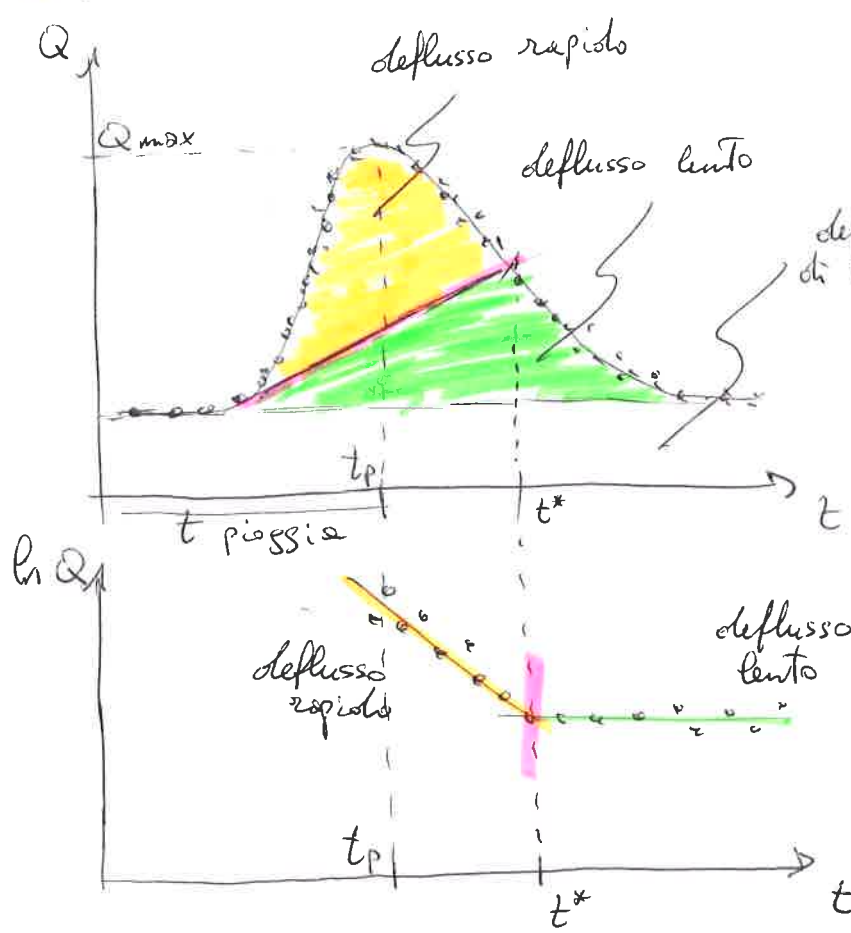
$$\sum_i \sum_j \lambda_i^{OK}(x) \lambda_j^{OK}(x) \cdot C_R(x_i; x_j) + \sigma_R^2 - 2 \sum_i \lambda_i^{OK}(x) \cdot C_R(x; x_i)$$

K.E.D.

$$\sigma_\epsilon^2 + 2\mu_0(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{KED}(x) - 1 \right] + 2\mu_1(x) \left[ \sum_i \lambda_i^{KED}(x) \cdot Y(x_i) - Y(x) \right]$$

# G. PRECIPITAZIONE AL SUOLO

Valutazione del volume d'acqua dovuto alla precipitazione, composto dal deflusso di base, il deflusso lento e il deflusso rapido.



Il grafico del deflusso mette in relazione portata e tempo, con un massimo corrispondente al tempo di pioggia. Si dividono i deflussi lento e rapido dalla scala logaritmica di  $Q$ , mentre il deflusso di base è costante.

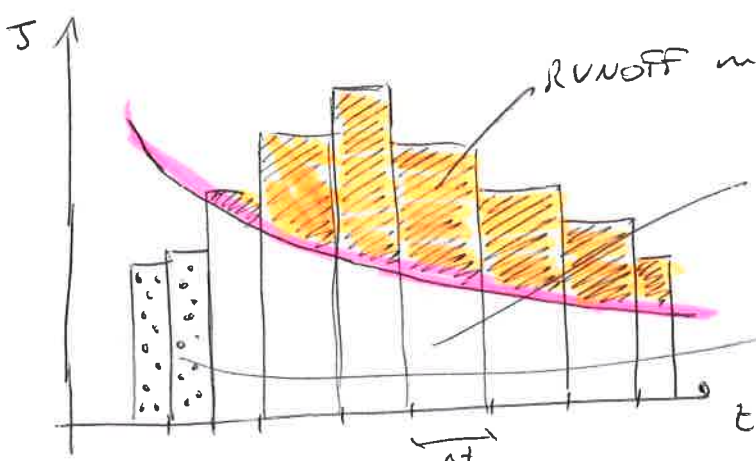
Lo scarico è  $e^{-\alpha t}$

$$\begin{cases} Q(t) = Q_{max} e^{-\alpha t} \\ \ln Q = \ln Q_{max} - \alpha t \end{cases}$$

Volume  $\rightarrow$  integrale della curva  $Q(t) \equiv$  area sotto

GRAFICO INTENSITA' DI PIOGGIA  $J(t)$ :

**METODO SCS**  
Soil Conservation Service



RUNOFF  $\equiv$  deflusso rapido (R)  
volume filtrato (F)  
volume evaporato o perso ( $I_0$ )

Calcolo del deflusso rapido:

$$R = P - F - I_0$$

$\Rightarrow$  ipotesi del metodo SCS

$$\frac{R}{P - I_0} = \frac{F}{S}$$

con  $\begin{cases} P = \text{precipitazione} \\ S = \text{parametro} \end{cases}$

13  
 Il parametro  $S$  indica la massima quantità che il suolo può infiltrare

$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ alto} \rightarrow \text{suolo permeabile} \\ S \text{ basso} \rightarrow \text{suolo impermeabile} \end{array} \right.$	

elaborando il sistema

$$\begin{cases} R = P - F - I_0 \\ \frac{R}{P - I_0} = \frac{F}{S} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{(P - I_0)^2}{P + S - I_0}$$

volume deflusso rapido  
**RUNOFF**

Aggiungendo il parametro  $\alpha$ , per cui  $I_0 = \alpha S$   
 si ha  $R = \frac{(P - \alpha S)^2}{P + (1 - \alpha)S}$  con  $P \geq \alpha S$  necessariamente

$\Rightarrow$  si ha bisogno di una relazione empirica per determinare il parametro  $S$ , dalle condizioni del tipo di suolo

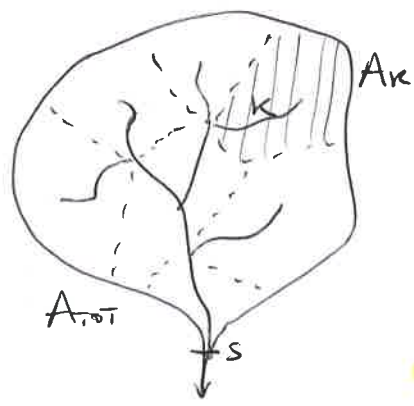
$$S = \left( \frac{1000}{CN} - 10 \right) 25,4 \text{ [mm]}$$

La  $CN$  = curve number (0-100)

$\left\{ \begin{array}{l} CN \rightarrow 0, \text{ suolo permeabile} \\ CN \rightarrow 100, \text{ suolo impermeabile} \end{array} \right.$	

$\Rightarrow$  classificazione del suolo in classi di permeabilità (A, B, C, D)

+ Il Curve Number può essere anche variabile in un bacino: divisione in sottobacini più omogenei per ogni tratto  $k$ -esimo del corso -



$\Rightarrow$  Anche  $S$  varia con  $CN$  -  $[S_k = \beta_k \bar{S}]$

Il runoff si calcola come

$$R_k(t) = \frac{[P_k(t) - \alpha \beta_k \bar{S}]^2}{P_k(t) + (1 - \alpha) \beta_k \bar{S}}$$

per ogni sottobacino

Il valore di  $S_k$  è preso dall'analisi dei pixel nel DEM, per cui  $S_k = \frac{1}{n} \sum_i S_{k,i}$ ; mentre  $\bar{S} = \frac{1}{A} \sum_i S_k \cdot A_k$

$\Rightarrow \beta_k = \frac{S_k}{\bar{S}}$  per il runoff

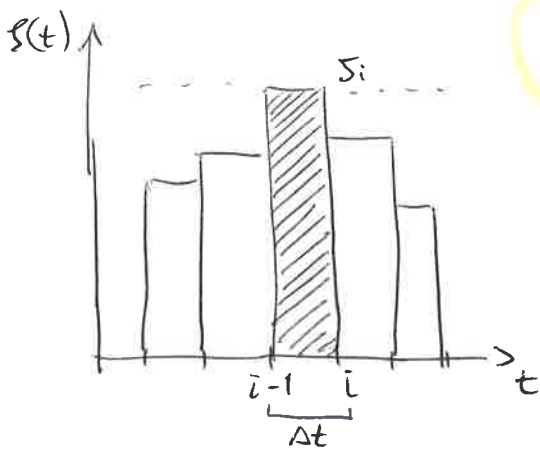
Dato che  $\beta_k$  è nota da tabelle caratteristiche del suolo, l'unica incognita resta  $\bar{S}$  da modellare.

Nota che  $v_s = \frac{V_s}{A}$  cioè il volume specifico del deflusso rapido

Allora si ha 
$$\frac{1}{4} \sum_k^N \frac{(P_k - \alpha \beta_k \bar{S})^2}{P_k + (1-\alpha) \beta_k \bar{S}} = 0$$

↳  $\bar{S}$  si ricava con una funzione non-lineare.

→ Valore di deflusso  $\bar{S}$  pari al deflusso rapido  $V_s$ ; quindi variare il parametro di ipotesi  $\alpha$  con la CALIBRAZIONE.  
 ⇒ Si divide il tempo in discreto ( $\Delta t$ ) intervalli, considerando il tempo con intensità massima ( $S_i$ )

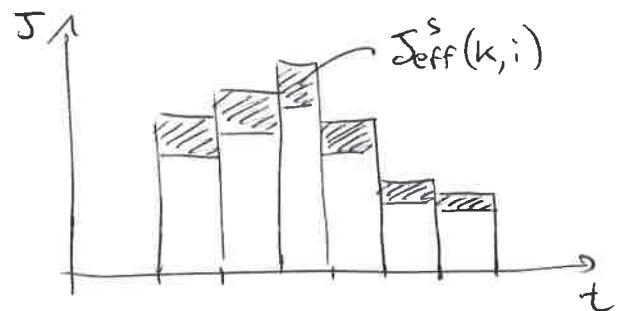


$$R_k(i\Delta t) = \frac{(\sum_j^i J_{kj} \Delta t - \alpha \beta_k \bar{S})^2}{\sum_j^i J_{kj} \Delta t + (1-\alpha) \beta_k \bar{S}}$$

tale che  $P = \sum_j^i J_{kj} \Delta t \geq \alpha \beta_k \bar{S}$

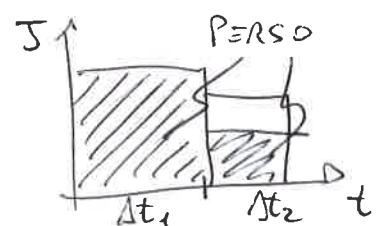
Allora si definisce  $J_{eff}^s$ , cioè l'intensità di piogge efficace

$$J_{eff}^s(k,i) = \frac{R_k(i\Delta t) - R_k[(i-1)\Delta t]}{\Delta t}$$



Se in un  $\Delta t$  si ha una parte persa e una parte defluita allora si valuta il sistema generale

$$\begin{cases} \sum_j^i J_{kj} \Delta t < \alpha \beta_k \bar{S} & \rightsquigarrow \Delta t \text{ perso} \\ \sum_j^{i+1} J_{kj} \Delta t > \alpha \beta_k \bar{S} & \rightsquigarrow \Delta t \text{ parzialmente perso} \end{cases}$$



il RESIDUO è  $\Delta h = \alpha \beta_k \bar{S} - \sum_j^i J_{kj} \Delta t$

↳ intensità residua  $\Delta S = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\alpha \beta_k \bar{S}}{\Delta t} - \sum_j^i J_{kj}$



$F$  = parte d'acqua infiltrata, nella parte inferiore dello ietogramme

$$F = P_k - R_k - \alpha \beta_k \bar{S}$$

$$= \sum_i^A S_{ki} \Delta t - R_k - \alpha \beta_k \bar{S} \Rightarrow V_p$$

Volume lento e infiltrato

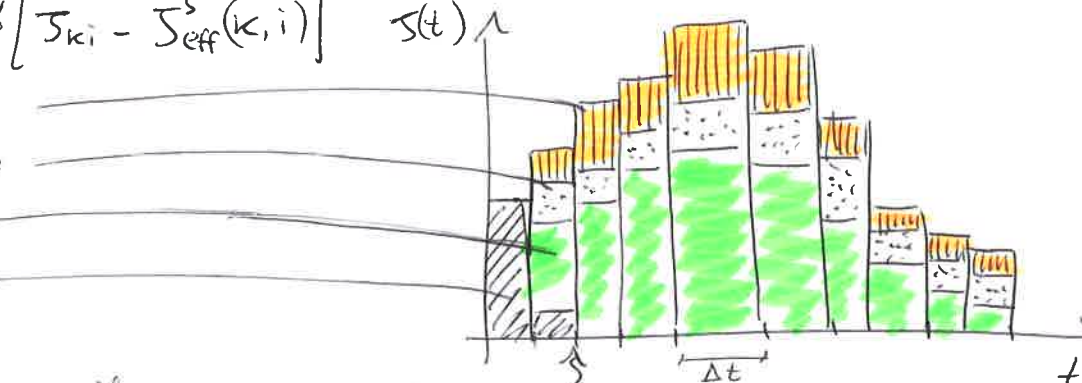
considerando il volume specifico  $\frac{V_p}{A} = v_p$  si valuta

$\phi = \frac{V_p}{F}$  Il coeff. di deflusso lento, tolta la precipitazione infiltrata.

↳ si calcola  $J_{eff}^p(k,i)$  l'intensità di pioggia per deflusso lento

$$J_{eff}^p(k,i) = \phi \cdot f(k,i) = \phi [S_{ki} - J_{eff}^s(k,i)]$$

defl. rapido  $J_{eff}^s$   
 defl. lento  $J_{eff}^p$   
 infiltrato  $f$   
 perso



$i_0$ : inizio deflusso superficiale ← fase di transizione

$$\left[ \sum_i^{i_0+1} S_{k+1} \Delta t - \alpha \beta_k \bar{S} \right] \left[ \sum_i^{i_0} S_{ki} \Delta t - \alpha \beta_k \bar{S} \right] \leq 0$$

essendo di segno opposto

Nella transizione  $i_0$  si valuta l'infiltrazione

$$f(k, i_0+1) = S_{k, i_0+1} - J_{eff}^s(k, i_0+1) - \left[ \frac{\alpha \beta_k \bar{S}}{\Delta t} - \sum_i^{i_0} S_{ki} \right]$$

• Bisogna considerare i valori iniziali di acqua presente: il parametro CN va inserito adeguatamente, secondo 3 scelte possibili

- CN(I) =  $\frac{4,2 \text{ CN(II)}}{10 + 0,058 \text{ CN(II)}}$  contenuto d'acqua più basso di quello medio
- CN(II) = valore tabulato per il tipo di suolo
- CN(III) =  $\frac{23 \text{ CN(II)}}{10 + 0,13 \text{ CN(II)}}$  contenuto d'acqua più alto di quello ~~medio~~ iniziale

# CALCOLO INFILTRAZIONE NEL SUOLO

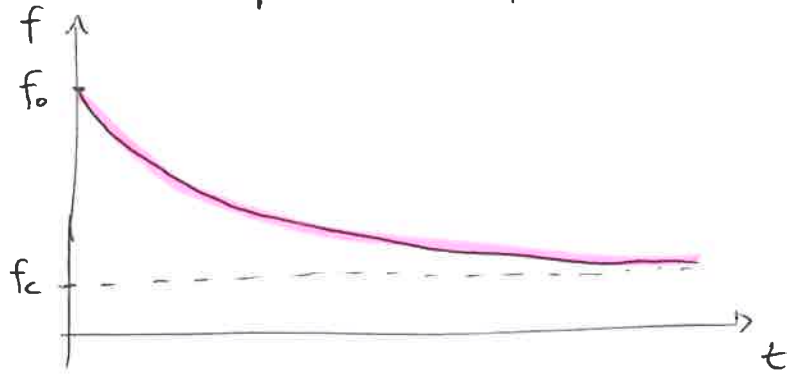
## METODO di HORTON

Per valutare la massima infiltrazione possibile o potenziale -

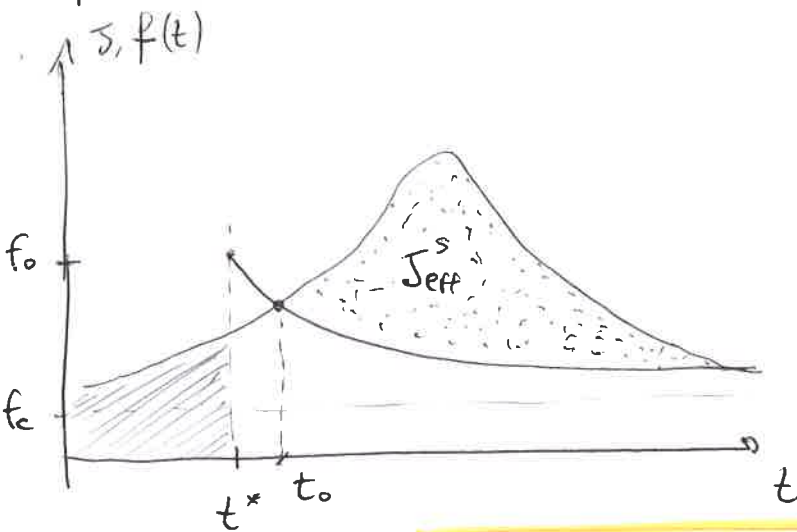
$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$$

$$\begin{cases} f_0 = \text{inf. iniziale} \\ f_c = \text{inf. massima} \end{cases}$$

↳  $k$  è il coeff. di diffusione relativo al suolo



Si impone che la precipitazione nel tempo  $t^*$  sia completamente infiltrata → traslazione delle curve con l'intensità  $J(t)$



Il RUNOFF inizia nel tempo  $t_0$ , con la saturazione del suolo per infiltrazione

$$\int_0^{t_0} J(t) dt = \int_{t^*}^{t_0} f(t - t^*) dt$$

con tempi incogniti  $t_0$  e  $t^*$ .

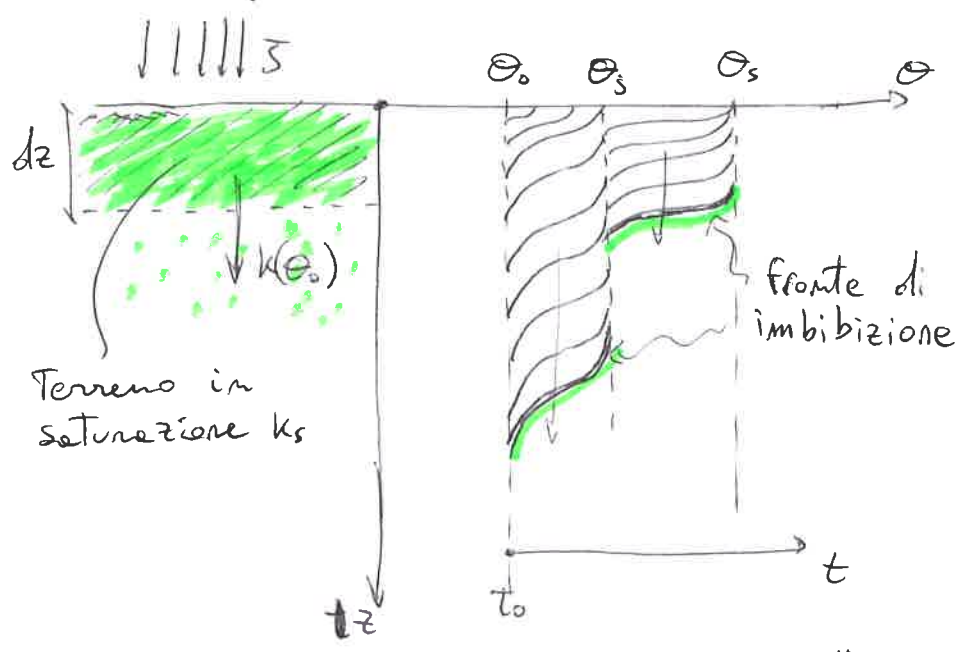
DEFUSSO RAPIDO  $J_{\text{eff}}^s(t) = J(t) - f(t - t^*)$

⚠ Il modello non tiene conto se in un  $\Delta t$  sia la infiltrazione maggiore dell'intensità di pioggia, in cui la curva dovrebbe alzarsi -

MODELLO di GREEN-AMPT

ipotesi del modello:

- suolo omogeneo  $\rightarrow k$  costante
- suolo indefinito
- Terreno orizzontale
- contenuto d'acqua iniziale costante  $\rightarrow \theta_0 = \text{cost}$   
(residuo)  $\theta_r < \theta < \theta_s$  (massimo)

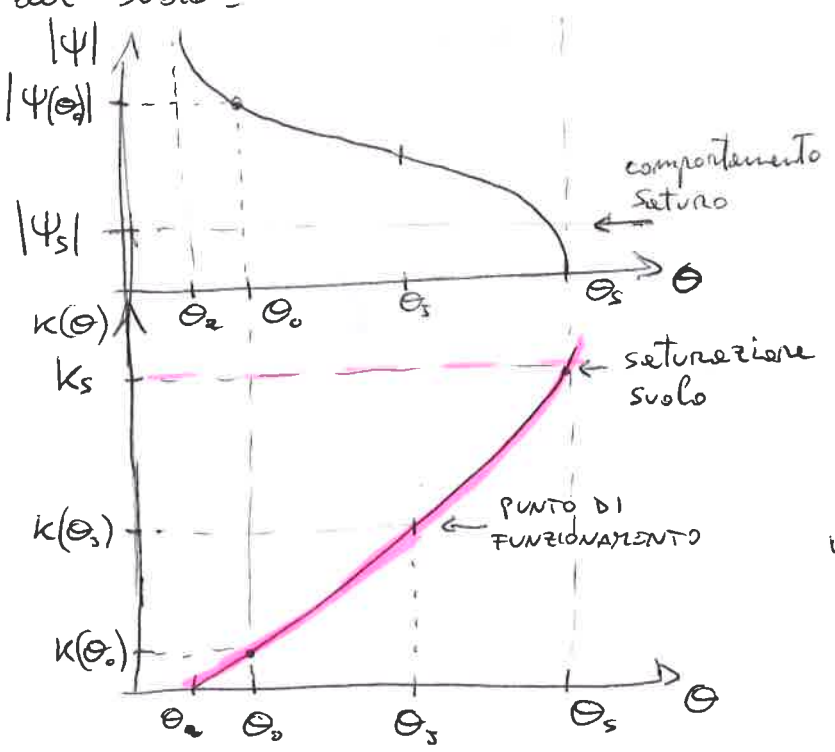


moto dell'acqua verso  $\hat{z}$  secondo la legge di Darcy

$$q_z = -k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z}$$

(portata specifica  $q_z = \frac{Q}{A}$ )

Schema in funzione del contenuto d'acqua delle caratteristiche del suolo.



$|\Psi|$  = caratteristica suolo (suzione)  
 $k_0$  = conducibilita idraulica

Nell'idrostatica si ha  
 $h = -z + \Psi = -z + \frac{P}{\rho g}$   
 quindi la portata

$$q(z) = -k(\theta) \frac{\partial}{\partial z} [-z + \Psi(z)]$$

$\rightarrow \theta_s$  contenuto massimo d'acqua in corrispondenza dell'intensita di pioggia.

Evoluzione del fenomeno in due casi:

CASO A  $\boxed{S < k_s}$  prima della saturazione del suolo  
 Il contenuto d'acqua in superficie ( $dz$ ) aumenta, facendo variare il  $k \rightarrow k(\theta_s)$  per cui il contenuto d'acqua è  $\theta_s - k(\theta_s) = S$  ottenendo il PUNTO di FUNZIONAMENTO, per cui il  $dz$  non ha cambi di contenuto d'acqua -  
 $\rightarrow$  non si crea deflusso rapido.

CASO B  $\boxed{S > k_s}$  dopo la saturazione del suolo  
 Il suolo è saturo, quindi si ha acqua in superficie, col fenomeno di POUNDING (ristagno) per cui inizia deflusso. È importante calcolarne il "tempo di Pounding", ovvero l'inizio del deflusso.

$$f(t_p) = z_f(t_p) (\theta_s - \theta_0) = S \cdot t_p \quad \text{contenuto d'acqua}$$

$$t_p = \frac{z_f(t_p) (\theta_s - \theta_0)}{S} \quad \text{restano incognite } z_f \text{ e } t_p$$

$z_f \Rightarrow$  fronte di imbilizzazione in profondità

Per ipotesi si ha la legge di Darcy  $q_z(t_p) \Big|_{z=0} = -k_s \frac{\partial}{\partial z} (-z + \psi(z)) = S$

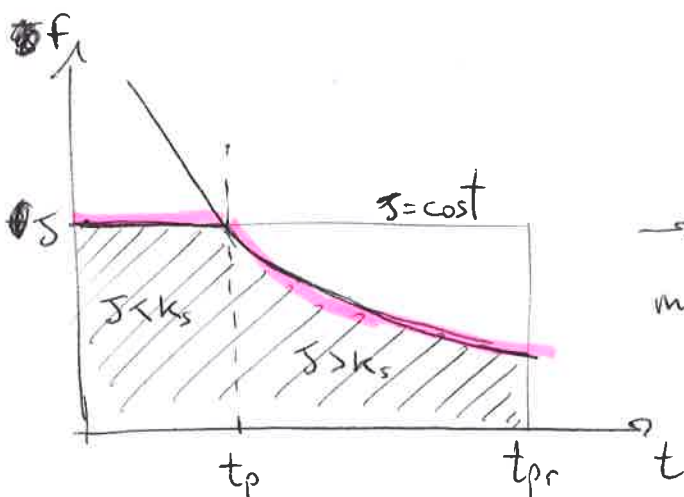
quindi  $f(t_p) = k_s - k_s \left( \frac{\psi(z_f) - \psi(0)}{z_f} \right)$  è la filtrazione nel tempo di Pounding

$$\Rightarrow S = f(t_p) = k_s \left( 1 + \frac{\psi_f}{z_f} \right)$$

$$\Rightarrow z_f = \frac{k_s |\psi_f|}{S - k_s} \quad \text{è il fronte}$$

$$\boxed{t_p = \frac{k_s |\psi_f| (\theta_s - \theta_0)}{(S - k_s) S}}$$

tempo di Pounding con saturazione in superficie



$$f(t) = q_z(0) = -k_s \frac{\partial}{\partial z} [-z + \psi] \Big|_{z=0}$$

$\rightarrow$  in  $S > k_s$  una parte di precipitazione si accumula senza infiltrarsi.



16  $\rightarrow f(t) = k_s + k_s \left[ \frac{|\psi_s| + \gamma(t)}{z_f(t)} \right]$   $\gamma(t)$  accumulo d'acqua

Il bilancio di massa definisce  $F(t) \Rightarrow \frac{dF}{dt} = f(t)$  integrale della filtrazione

$$F(t) = z_f(t) (\theta_s - \theta_0)$$

quindi  ~~$f(t) = k_s \left( 1 + \frac{|\psi_s| (\theta_s - \theta_0)}{F(t)} \right) (\theta_s - \theta_0)$~~

$$f(t) = k_s + k_s \left( \frac{|\psi_s| + \gamma(t)}{F(t)} \right) (\theta_s - \theta_0) \text{ è l'infiltrazione}$$

Avendo  $\gamma(t) \ll |\psi_f|$  si ha  $\frac{dF}{dt} = k_s \left( \frac{F(t) + |\psi_f| (\theta_s - \theta_0)}{F(t)} \right)$

Elaborando l'espressione si ricava il ~~tempo~~ tempo generico considerando il ~~poncing~~ ponding e l'evoluzione del fenomeno.

$$t = t_p + \frac{F(t) - \bar{F}_p}{k_s} - |\psi_f| (\theta_s - \theta_0) \ln \left( \frac{F(t) + |\psi_f| (\theta_s - \theta_0)}{\bar{F}_p + |\psi_f| (\theta_s - \theta_0)} \right)$$

con l'ipotesi di  $t_p \ll t$  si ha

$$t = \frac{F(t)}{k_s} + |\psi_f| (\theta_s - \theta_0) \ln \left( \frac{|\psi_f| (\theta_s - \theta_0)}{F(t) + |\psi_f| (\theta_s - \theta_0)} \right)$$

Evoluzione nel tempo dei parametri caratteristici del suolo

$\rightarrow$  infiltrazione reale  $f(t) = k_s \left[ 1 + \frac{|\psi_f| (\theta_s - \theta_0)}{F(t)} \right]$

DEFINIZIONE TERMINI di FILTRAZIONI:

- $F_{t+\Delta t}$  = infiltrazione cumulata nel tempo  $t+\Delta t$
- $f_{t+\Delta t}$  = capacità di infiltrazione al tempo  $t+\Delta t$
- $F_p$  = infiltrazione cumulata al tempo di ponding

• se l'intensità di precipitazione è costante ( $\gamma = \text{cost}$ ) si usa il modello di Horton

$$\bar{F}_{t+\Delta t} = \bar{F}_t + f_c \Delta t + \frac{(f_t - f_c)}{k} [1 - e^{-k\Delta t}] \text{ per l'infiltrazione cumulata}$$

Se ne ricava la  
capacità di  
infiltrazione

$$f_{t+\Delta t} = f_t - k [F_{t+\Delta t} - \bar{T}_t - f_c \Delta t]$$

Per ipotesi l'intensità di pioggia corrisponde al ponding  $f_p = S_p$

allora  $S_p = f_c + (f_0 - f_c) e^{-k t_p} \rightarrow t_p = -\frac{1}{k} \ln \left( \frac{S - f_c}{f_0 - f_c} \right)$

Tempo di ponding

Si trova la cumulata al tempo di ponding

$$F_p = \frac{1}{k} \left[ f_0 - S + f_c \cdot \ln \left( \frac{f_0 - f_c}{S - f_c} \right) \right]$$

• Il modello di Philips introduce  $\left\{ \begin{array}{l} k = \text{conducibilità idraulica} \\ S = \text{sorptivity} = \text{misura della capacità di assorbire liquido per capillarità} \end{array} \right.$

con  $f_t = \frac{1}{2} S t^{-\frac{1}{2}} + k$

per cui al ponding si misura una filtrazione pari a

$$F_p = \frac{S^2 \left( S - \frac{k}{2} \right)}{2 \left( S - k \right)^2}, \text{ per } S > k$$

⚠ Per bacini piccoli l'onda di piena coincide con la distribuzione della pioggia; per bacini grandi l'effetto della distribuzione è maggiore con discostamento tra onde di piena (alla sezione) e idrogramme (stazioni).

CALIBRAZIONE: è il procedimento con cui si variano i parametri per avvicinare un modello alle raccolte dati reale.

↳ si fa riferimento alle piene storiche in passato con alte intensità e contenuto d'acqua elevato.

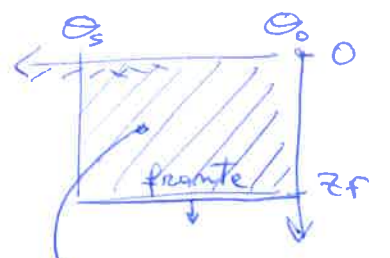
PARAMETRI  $\left\{ \begin{array}{l} \text{tempi di trasferimento} \rightarrow \text{realistici} \\ \text{separazione piogge} \rightarrow \text{non realistici} \\ \text{(contenuto d'acqua incognite)} \end{array} \right.$

Nel modello GREEN-AMPT

il fronte di imbibizione ha  $q_z(z_f) = 0$

(legge di Darcy  $q_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$ )

$$\Rightarrow J = q_z(0) = -k_s \frac{\partial}{\partial z} (-z + \Psi(z))$$



$$z_f(\theta_s - \theta_0) = F(t)$$

infiltrazione cumulata



$$z_f = \frac{F(t)}{\theta_s - \theta_0}$$

Allora

~~$$J = k_s + k_s$$~~

$$J = k_s \frac{h_2 - h_1}{z_2 - z_1}$$

con

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = -\Psi - z_f \\ z_2 = z_f \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$J = k_s \frac{\Psi + z_f}{z_f}$$

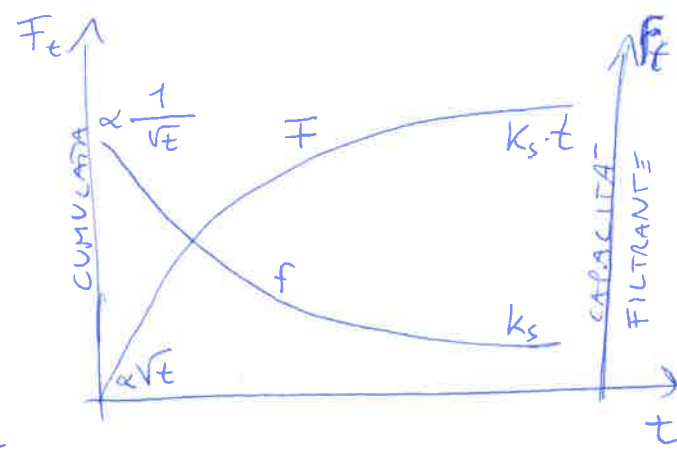
$$J = k_s \frac{\Psi + \frac{F(t)}{\theta_s - \theta_0}}{\frac{F(t)}{\theta_s - \theta_0}} (\theta_s - \theta_0) = k_s \frac{\Psi(\Delta\theta) + F(t)}{F(t)}$$

$$\int_T dt \left( k_s \frac{\Psi(\Delta\theta) + F(t)}{F(t)} \right) dt = k_s \cdot t + \Psi(\Delta\theta) \log \left( \frac{F(t)}{\Psi(\Delta\theta)} + 1 \right) = F(t)$$

- in  $T \rightarrow \infty$   $\Psi = 0$  saturo
- $\Rightarrow F(t) = k_s t$
- in  $T \rightarrow 0$  serie di Taylor

$$F(t) = \sqrt{\frac{2 \Delta\theta k_s}{\Psi} t}$$

infiltrazione cumulata a  $T=0$  e  $T=\infty$



tempo di ponding da metodo di Horton  $f(t) = f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt} = J$

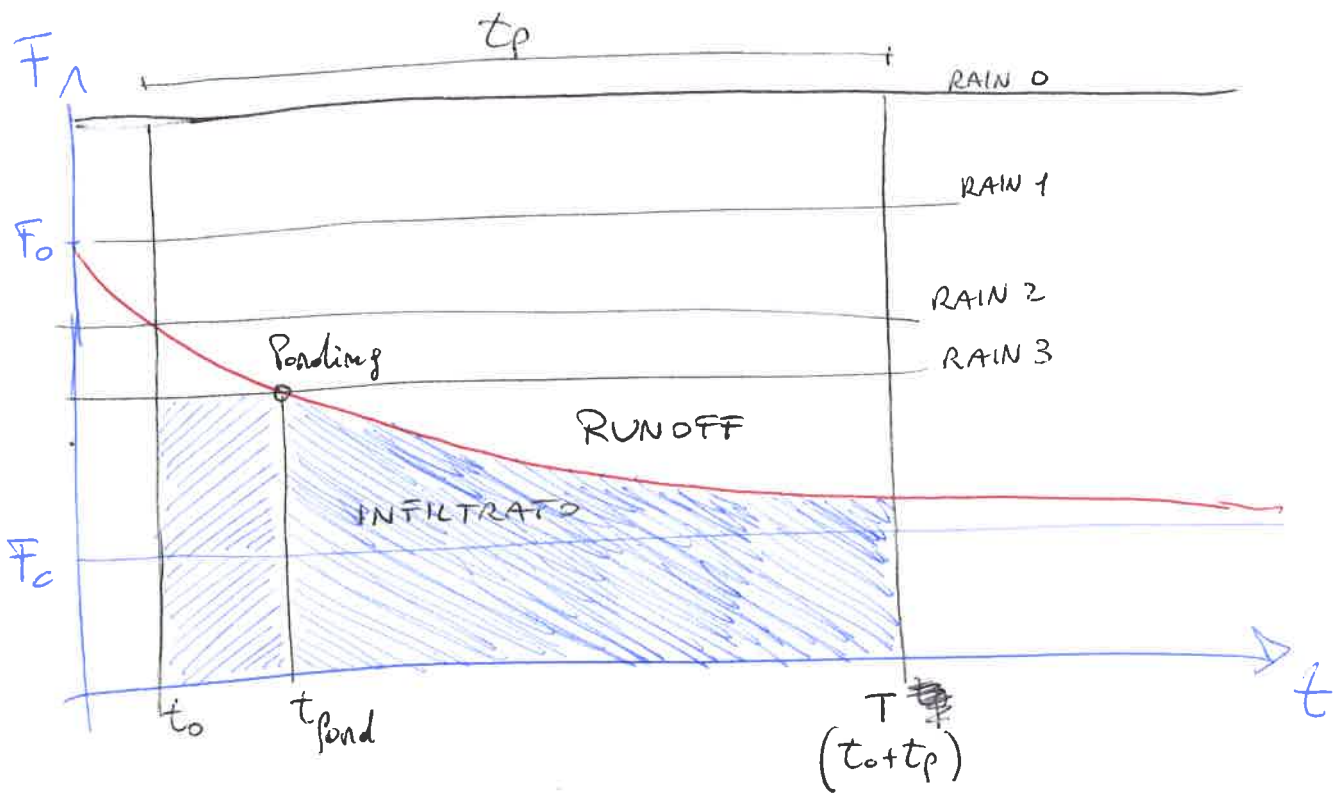
dove  $J = F(t) / t$

$$\frac{J - f_c}{f_0 - f_c} = e^{-kt} \Rightarrow t_p = -\frac{1}{k} \ln \left( \frac{J - f_c}{f_0 - f_c} \right)$$

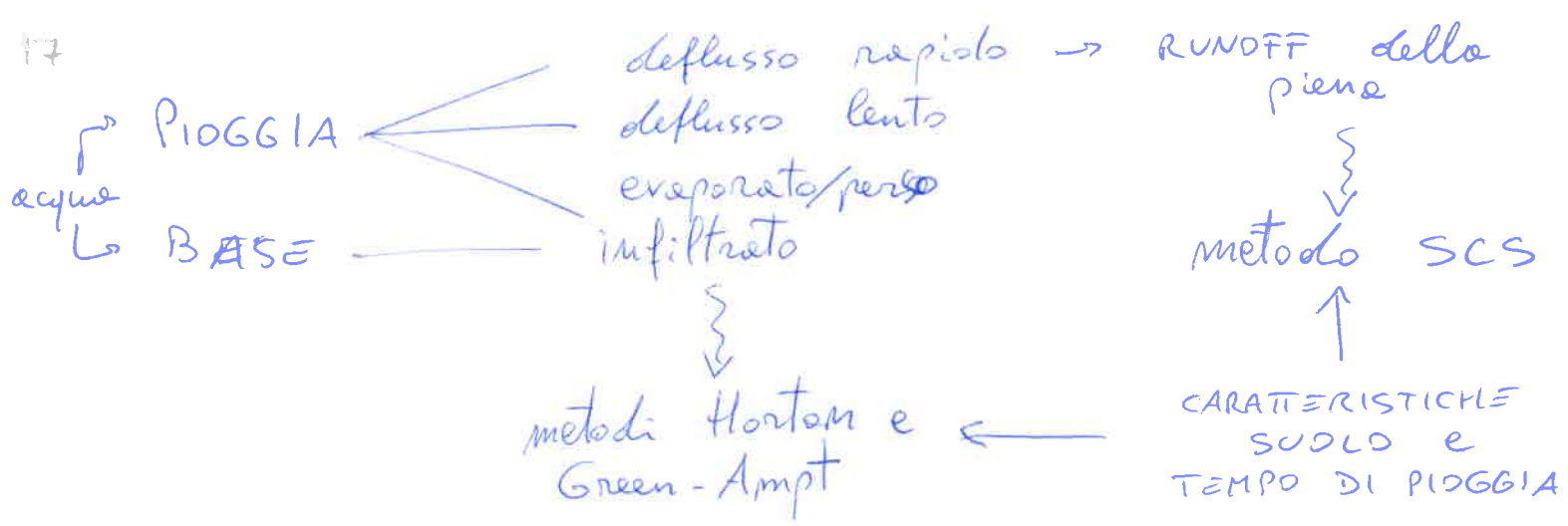
Dato che  $F_p = \frac{1}{k} [f_0 - J] + f_c \cdot t$  allora

$$F_p = \frac{1}{k} \left[ f_0 - J - f_c \ln \left( \frac{J - f_c}{f_0 - f_c} \right) \right]$$

cumulata filtrata  
al tempo di ponding







met. scs : divisione sottobacini (k)

$$R_k(i\Delta t) = \frac{(\sum_j^i J_{kj} \Delta t - \alpha \beta_k \bar{S})^2}{\sum_j^i J_{kj} \Delta t + (1-\alpha) \beta_k \bar{S}}$$

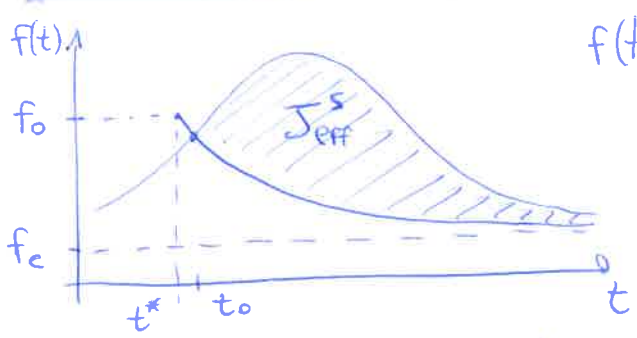
~~pioggia~~ pioggia efficace di intensità  $J_{eff}$

Lo il parametro  $\bar{S} = \frac{1}{A_{tot}} \sum_i^k S_k A_k = \beta_k S_k$

com  $S_k = (\frac{1000}{CN} - 10) 25,4$  empirico

terreno { permeabile → CN basso, S alto ⇒ R basso  
 impermeabile → CN alto, S basso ⇒ R alto

met. Horton : calcolo della filtrazione (curva)



$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt}, \quad k \text{ dal suolo}$$

$$J_{eff}^S = J(t) - f(t - t^*) \quad \text{pioggia efficace del deflusso rapido}$$

modello Green-Ampt : velocità di filtrazione/imbibizione

parametro  $t_p$  tempo di Ponding

$$t_p = \frac{K_s |\psi_f|}{(\bar{S} - K_s) \bar{S}} (\theta_s - \theta_0)$$

{ parametri terreno  $\psi, k$   
 contenuto d'acqua  $\theta$

$$\bar{F}_p = \frac{1}{k} \left[ f_0 - \bar{S} + f_c \cdot \ln \left( \frac{(f_0 - f_c)}{(\bar{S} - f_c)} \right) \right]$$

filtrazione cumulata al tempo di Ponding

La Modellazione di evento ha la necessità di costruire un pluviogramma delle precipitazioni nette tenendo conto delle perdite iniziali  $I_0$  e delle perdite di infiltrazione  $f_c = \text{cost}$ .

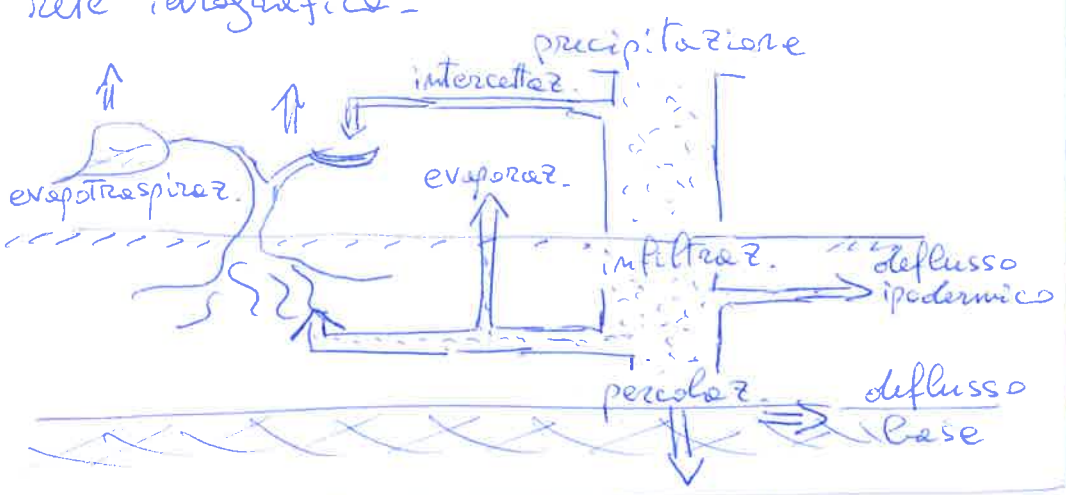
precipitazione netta  $P_{net}$   $\begin{cases} 0 & \text{se } \sum P_t < I_0 & (t < t') \\ P_t - f_c & \text{se } \sum P_t > I_0 \text{ e } P_t > f_c & (t' < t < t'') \\ 0 & \text{se } \sum P_t > I_0 \text{ e } P_t < f_c & (t > t'') \end{cases}$

equazioni  $\begin{cases} \text{Horton} & f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt} \\ \text{Philip} & f(t) = \frac{1}{2} S t^{-1/2} + K \end{cases}$

- tipi di terreno CN
- A: scarso deflusso, infiltrazione molto elevata.
  - B: moderato deflusso, elevata capacità di filtrazione.
  - C: potenzialità di deflusso, scarsa infiltrazione.
  - D: deflusso alto, scarsa infiltrazione.

**TRASFORMAZIONE AFFLUSSI - DEFLUSSI**

Raggruppa l'insieme dei diversi processi idrologici che concorrono alla formazione del deflusso a partire dalle precipitazioni meteoriche, prima ancora che il deflusso si incanali nella rete idrografica.



La precipitazione viene in parte intercettata dalla vegetazione, in parte si infiltra nel suolo, in parte ve ad accumularsi in piccoli invasi naturali o

artificiali - la rimanente parte va a costituire il deflusso superficiale che scorrerà verso le linee di massima pendenze del terreno secondo la rete idrografica.



il sistema suolo-vegetazione costituisce una naturale capacità di invaso, che tende a devotare la quantità d'acqua precipitata che arriverà alla rete idrografica [PRECIPITAZIONE EFFICACE].

Tale deviazione dipenderà dalla capacità complessiva di tali invasi, che varia nel tempo sia a cause del loro progressivo riempimento durante prolungati eventi di pioggia, sia a cause di altri importanti processi di trasferimento dell'acqua che agiscono nel sistema suolo-atmosfera.

Parte dell'acqua infiltrata negli strati superficiali del suolo proseguirà il moto di filtrazione verso gli strati più profondi e le falde [PERCOLAZIONE], mentre una parte filterà verso la ~~pendenza del terreno~~ rete idrografica ~~del~~ mantenendosi negli strati superficiali [DEFUSSO IPODERMICO]. Quindi, parte dell'acqua infiltrata andrà ancora a contribuire al deflusso nelle rete idrografica, ma con tempi sensibilmente più lunghi [DEFUSSO DI BASE] del deflusso superficiale.

Del punto di vista matematico, il problema della ricostruzione di un idrogramma di piena può essere visto come la messa a punto di un filtro <sup>il cui</sup> ~~da~~ ingresso è costituito da misure di una variabile  $P(s,t)$  distribuita, e la cui uscita è la serie  $Q(t)$  integrata nello spazio.

L'ingresso principale del modello sarà costituito da una serie di misure di piogge interpolate per ottenere l'andamento delle precipitazioni lorda al suolo, in termini di afflussi per unità di area. La parte che andrà in scorrimento superficiale [DEFUSSO EFFICACE] verrà stimata con un opportuno modello di trasformazione afflussi-deflussi, che stimerà la produzione di deflusso  $q(s,t)$  idealmente in ciascun punto del bacino. Il processo di concentrazione dei deflussi superficiali nella rete sino alla sezione di chiusura verrà rappresentato tramite un opportuno modello di formazione dell'onda di piena.

Al calcolo delle portate al colmo può procedersi utilizzando modelli concettuali che simulano i fenomeni di laminazione degli afflussi e di trasferimento delle masse liquide che si verificano in un bacino mediante una cascata di elementi disposti in serie che sono atti a rappresentare tali fenomeni.

$t_c$  = tempo corivazione, il tempo che l'acqua impiega per portarsi dal punto più lontano del bacino della sezione considerata, pari alla somma del tempo di ruscellamento e dei tempi di percorrenza dei tratti attraversati.

$$t_c = t_c' + t_p$$

$t_r$  = tempo di ruscellamento, il tempo massimo che impiegano le particelle di pioggia a raggiungere lo specchio a partire dal punto di caduta.

$t_p$  = tempo di percorrenza, rapporto tra la lunghezza e la velocità di percorrenza nel canale.  $t_p = \frac{L}{v}$ .

$\phi$  = coefficiente di afflusso, rapporto tra il volume efficace di pioggia e il volume totale di precipitazione.

metodo della corivazione

$$Q_{max} = \frac{\phi \cdot J(t_c) \cdot A}{360}$$

metodo dell'inverso

$$\phi \cdot J A dt = q \cdot (dt + dw)$$

metodo dell'inverso semplificato

$$Q_{max} = \frac{\phi \cdot \phi' \cdot J(15) \cdot A}{360}$$



# 5. TRASPORTO BACINO

## MODELLO AFLUSSI - DEFLUSSI

Le precipitazioni generano portate -  
 ↳ la risposta del bacino è relativa alle condizioni iniziali

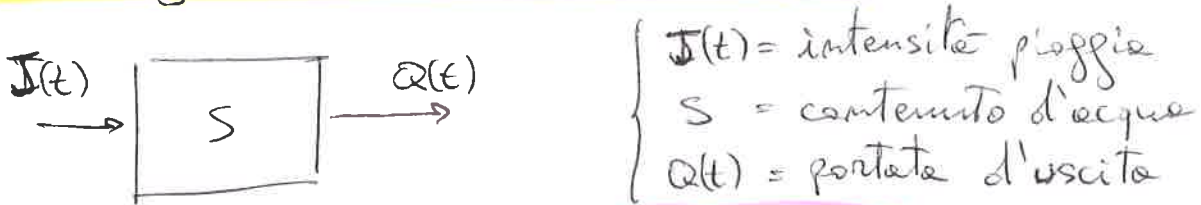
↳ modello di controllo lineare -

Ogni particella ha il suo percorso, l'ipotesi di stesso percorso porta l'idrogramma di piena alla sezione di chiusura -

⇒ Per piccoli bacini si pone  $Q = A \cdot S$  [ $\text{mm}^2 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$ ]

## DIAGRAMMA UNITARIO ISTANTANEO (IUH)

Bacino è un sistema con la relazione tra ingresso e uscite legate al contenuto d'acqua



$J(t)$  = intensità pioggia  
 $S$  = contenuto d'acqua  
 $Q(t)$  = portata d'uscita

Conservazione della massa:  $\frac{dS}{dt} = J(t) - Q(t)$ , volume d'accumulo

ipotesi:

1. sistema lineare, combinazione di più sistemi;
2. sistema invariante, indipendente dalle condizioni.

→ Funzione di Dirac:  $\delta(t)$  per cui  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Quindi in uscita si ha  $u(t)$ : funzione di Trasferimento che dipende dalle caratteristiche del sistema.

Ogni impulso  $i$ -esimo  $J_i$  per un tempo discretizzato, si ha una relativa  $Q_i$ , per la linearità si ha il

sistema  $Q_{TOT} = \sum_i Q_i = A_{TOT} \sum_i J(i \cdot \Delta t) u(t - i \Delta t) \Delta t$

⇒ INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

in Tempo continuo  
 ( $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$Q(t) = A \int_0^t \underbrace{J(t')}_{\text{forzante esterne}} \underbrace{u(t-t')}_{\text{funzione Trasferim}}$$

# \* MODELLO DELL'INVASO LINEARE \*

Ipotesi: la portata prodotta dal sistema idrologico dipende linearmente dal volume contenuto all'interno del bacino

Storage:  $S = kQ$  [quantità di acqua immagazzinata]

→ adimensionare col volume di ingresso  $s = \frac{S}{V}$

quindi  $s = k \cdot u$  in cui  $V = \int_0^{t_p} S(t) dt$

→ equazione di continuità diventa

$$S(t) - u(t) = \frac{ds}{dt} = k \frac{du}{dt}$$

△ annullando la forzante  $-u(t) = k \frac{du}{dt}$   $-\frac{1}{k} \int dt = \int \frac{du}{u(t)}$

elaborando, integrando nel tempo  $\int_0^{\infty} S(t) dt = \int_0^{\infty} u(t) dt = 1$

$u(t) = c_1 e^{-t/k}$

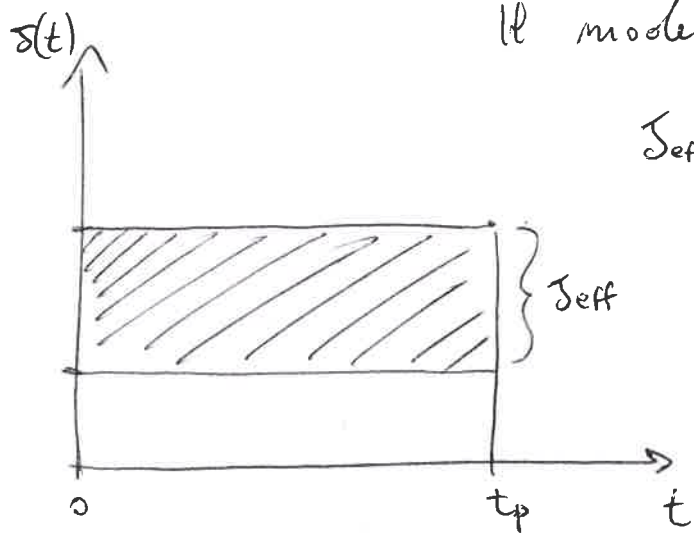
quindi  $\int_0^{\infty} c_1 e^{-t/k} dt = 1$

$$c_1 = \frac{1}{k}$$

→ ipotesi: sistema è serbatoio lineare

⇒ portata dipende linearmente dal volume immagazzinato ~~neto~~  $(Q = \frac{S}{k})$ , compatibile con  $u(t)$ .

Quindi l'idrogramma unitario istantaneo ha la funzione di trasferimento  $u(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}$



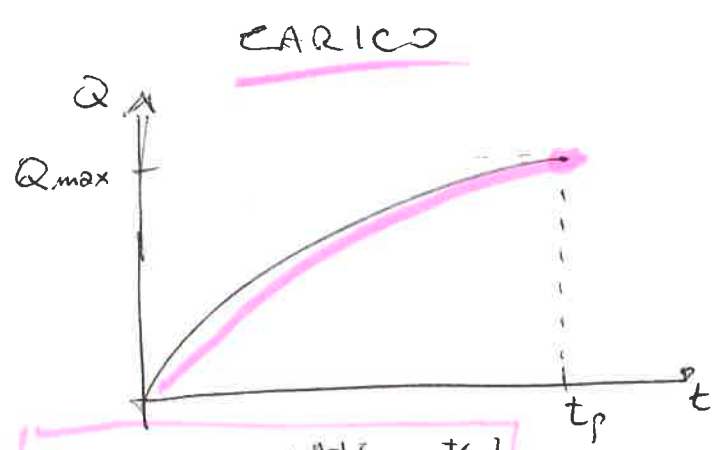
Il modello è  $h = a(T_R) t_p^n$  quindi

$$Q_{eff}(t) = \begin{cases} a t_p^{n-1}, & 0 \leq t \leq t_p \\ 0, & t > t_p \end{cases}$$

La portata è  $Q(t) = A \int_0^t Q_{eff}(t') \cdot u(t-t') dt$

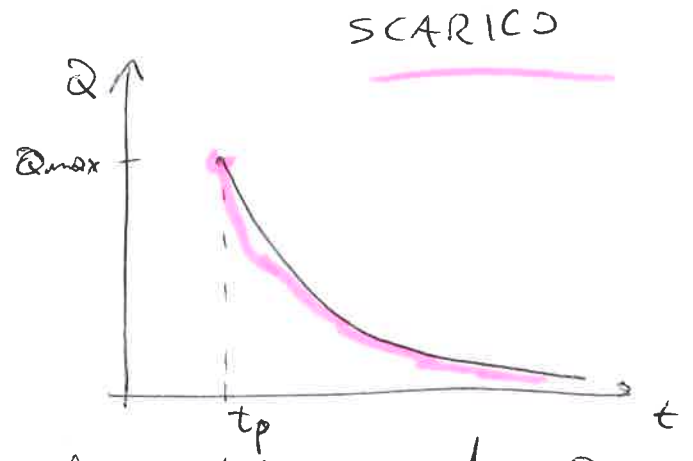
dell'integrale di convoluzione

19 Il tempo si divide in CARICO ( $t \leq t_p$ ) e SCARICO ( $t > t_p$ ), quindi si valutano le intensità e la portata:



$$Q_{max} = A \phi a t_p^{n-1} [1 - e^{-t_p/k}]$$

con  $t \rightarrow t_p$



la portata va da  $Q_{max}$  a zero con legge esponenziale.

(k) è parametro del suolo, se maggiore la curva è più attenuata.

Il tempo di pioggia  $t_p$  massimo si ha con

$$\frac{dQ_{max}}{dt_p} = A \phi a \left\{ (n-1) t_p^{n-1} [1 - e^{-t_p/k}] + \frac{1}{k} e^{-t_p/k} t_p^{n-1} \right\} = 0$$

$$\dagger (n-1) - (n-1) e^{-t_p/k} + \frac{t_p}{k} e^{-t_p/k} = 0$$

grandi  $\rightarrow$  aumentare  $t_p$ : per bacini grandi si ha crisi con piogge lunghe.

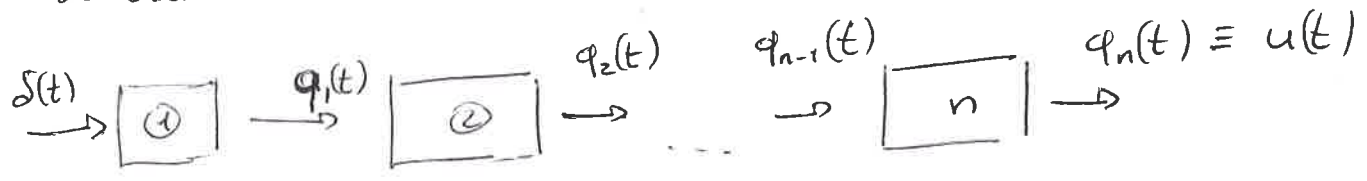
piccoli  $\rightarrow$  diminuisce  $t_p$ : per bacini piccoli si ha crisi con piogge brevi.

\* È un modello semplice a due parametri ( $\phi, k$ )

- $\phi \rightarrow$  coeff di deflusso  $[0; 1]$
- $k \rightarrow$  volume, del suolo

# \* MODELLO DI NASH \*

ipotesi: utilizzare più serbatoi a cascata, stesse caratteristiche, modificando la funzione di trasferimento tra i serbatoi



$$q_2(t) = \int_0^t u_1(t') \cdot u_2(t-t') dt'$$

allora  $u_n(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}$

la risposta di ogni serbatoio è

$$q_n(t) = \frac{1}{(n-1)!k} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k} = u(t)$$

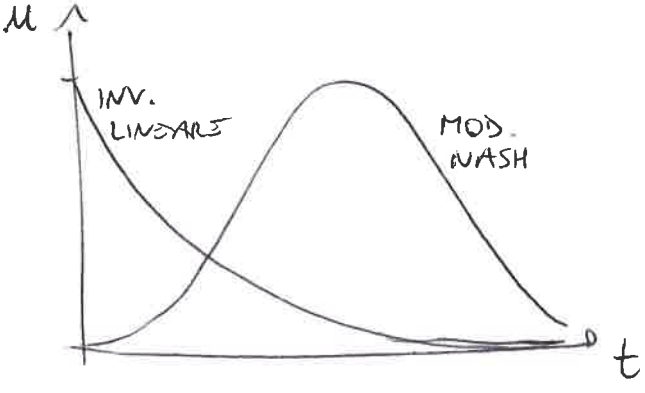
n = intero  $T_i(n) = (n-1)!$

$$u(t) = \frac{1}{T(n) \cdot k} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k}$$

con  $n=1$   
 $u(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}$  modello  
 invaso  
 lineare

n = reale, dipende dai parametri (n, k)

modello di Nash più flessibile



si calcolano i momenti della funzione  $T$  con Laplace

$$L(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

[convoluzione  $\rightarrow$  prodotto]  
 $f * g \quad \hat{f} \cdot \hat{g}$

quindi semplifica l'operazione tra più funzioni

• Proprietà

a)  $g * f = \int_0^t g(t') \cdot f(t-t') dt'$

$$\mapsto L(g * f) = \hat{g}(s) \cdot \tilde{f}(s)$$

b)  $f \rightarrow p df \Rightarrow \mu_m = \int_0^{\infty} t^m f(t) dt = -(-1)^m \left. \frac{d^m}{ds^m} \tilde{f}(s) \right|_{s=0}$



20 → quindi se il trasferimento per l'invaso lineare è  
 $u(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}$  vale  $\tilde{U}(s) = \frac{1}{1+sk}$

momenti  $\mu_i$

$$\mu_1 = -1 \frac{d\tilde{U}(s)}{ds} \Big|_{s=0} \rightarrow k \equiv \bar{t}$$

$$\mu_2 = \frac{d^2\tilde{U}(s)}{ds^2} = 2k^2$$

⇒  $\sigma_t^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = 2k^2 - k^2 = k^2$  unico parametro del metodo per l'invaso lineare

\* Nel modello di Nash  $\tilde{U}(s) = (1+sk)^n$

momenti  $\mu_i$

$$\mu_1 = \frac{d\tilde{U}(s)}{ds} = -n(1+sk)^{n-1} \cdot k \rightarrow \bar{t} = -\frac{d\tilde{U}(s)}{ds} \Big|_{s=0} = nk$$

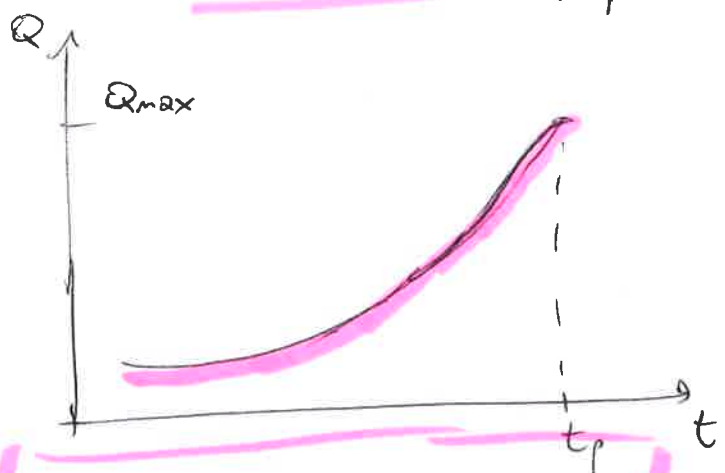
$$\mu_2 = \frac{d^2\tilde{U}(s)}{ds^2} = n(n+1)(1+sk)^{n-2} k^2$$

$$\rightarrow \mu_2 = -\frac{d^2\tilde{U}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = n(n+1)k^2$$

⇒  $\sigma_t^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = nk^2$  dipendenza da due parametri per il modello di Nash

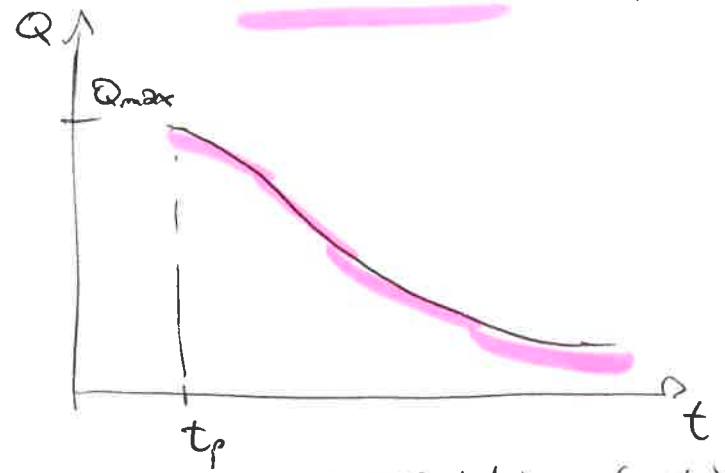
Anche nel modello di Nash si distingue

CARICO  $t \leq t_p$



$$Q(t) = A \phi \alpha t_p^{n-1} \left\{ 1 - \frac{T(n, t/k)}{T(n)} \right\}$$

SCARICO  $t > t_p$

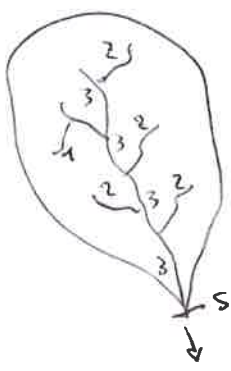


$$Q(t) = A \phi \alpha t_p^{n-1} \left\{ \frac{T(n, \frac{t-t_p}{k}) - T(n, t_p/k)}{T(n)} \right\}$$

i parametri  $n, k$  hanno relazioni empiriche

$$\left\{ \begin{aligned} n &= 3,28 \cdot R_B^{0,78} \cdot R_A^{-0,78} \cdot R_L^{0,07} \\ k &= 0,7 \frac{L_\Omega}{V} R_B^{-0,48} \cdot R_A^{0,48} \cdot R_L^{-0,48} \end{aligned} \right.$$

BACINO con corsi numerati



$\left\{ \begin{aligned} \Omega &= \text{massimo ordine} = 3 \\ L_\Omega &= \text{lunghezza canale } \Omega \\ V &= \text{velocità} \end{aligned} \right.$

• RAPPORTI

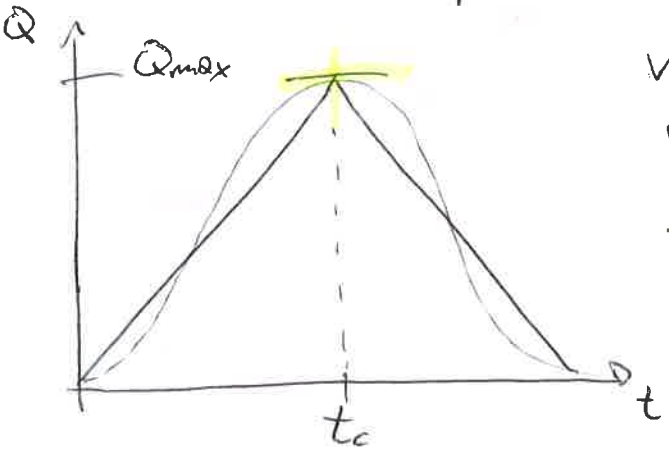
$R_B = \text{rapporto di biforcazione} = \left[ \frac{\text{numero canali } < \Omega}{\text{numero canali } \Omega} \right]$

$R_A = \text{rapporto delle aree} = \left[ \frac{\text{aree canali } \Omega}{\text{aree canali } < \Omega} \right]$

$R_L = \text{rapporto delle lunghezze} = \left[ \frac{\text{lunghezza canali } \Omega}{\text{lunghezza canali } < \Omega} \right]$

\* MODELLO CINEMATICO \*

Ipotesi: onda di piena triangolare, in funzione del massimo corrispondente al tempo di corruzione ( $t_c$ ).



Volume piena = area grafico

$$V = \frac{2 t_c \cdot Q_{max}}{2} \quad \text{e} \quad h = a t_p^n$$

$$\rightarrow Q_{max} = \frac{V}{t_c} = \phi A a t_c^{n-1}$$

Valutazione del  $t_p$  rispetto al  $(t_c)$ : particelle d'acqua

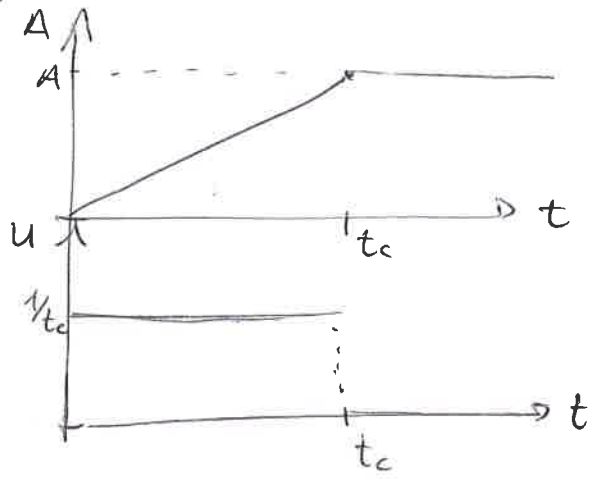
scorre dal punto più lontano alla sezione di chiusura.

Formula empirica di Giandotti

$$t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1,5L}{0,8\sqrt{H-z}}$$

L'Area contribuyente cresce col tempo prima della corivazio=

$$A(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_c} t, & t \leq t_c \\ A, & t > t_c \end{cases}$$



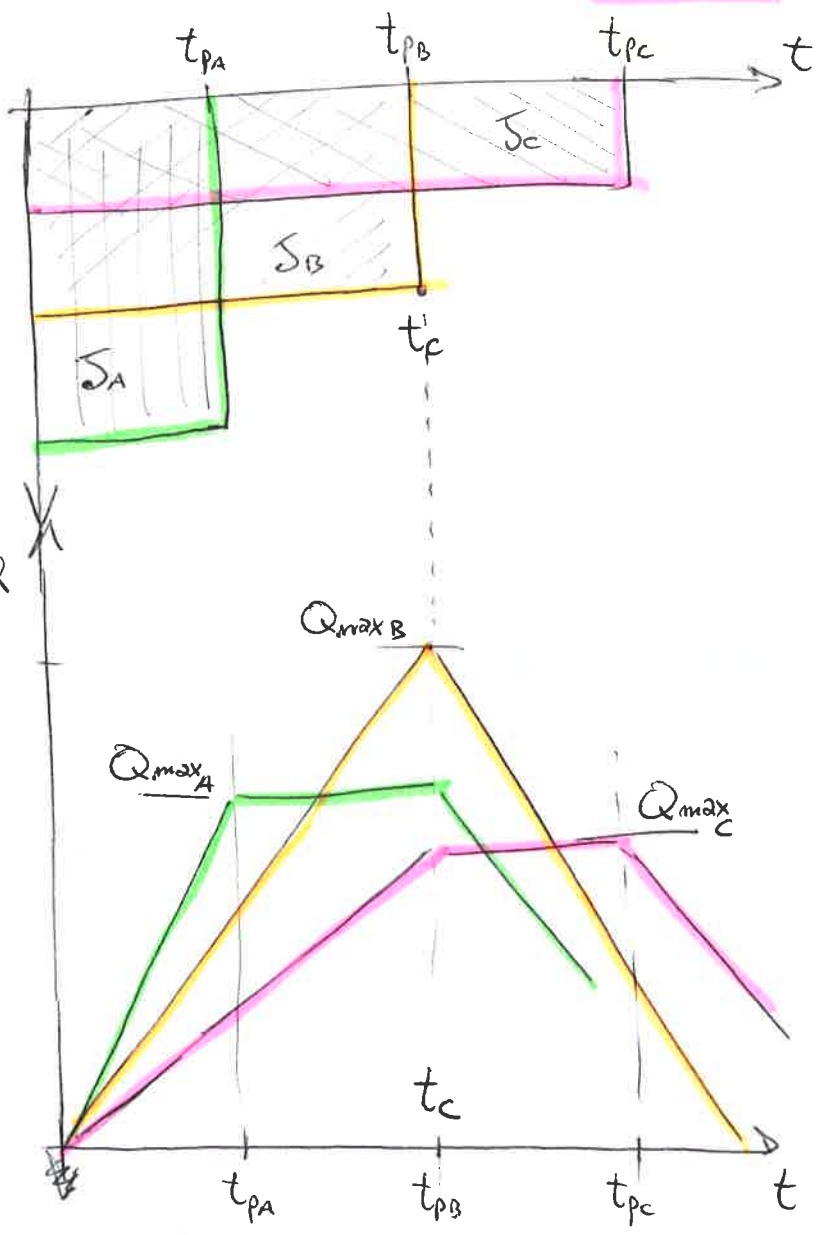
La funzione di trasferimento

$$u(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[ \frac{A(t)}{A} \right] = \frac{1}{t_c}, & t \leq t_c \\ 0, & t > t_c \end{cases}$$

Relazione tempi  $t_p - t_c$

- CASO A
- CASO B
- CASO C

$t_p < t_c$  intensa  
 $t_p = t_c$  moderata  
 $t_p > t_c$  leggera



CASO A  
 la portata cresce con  
 $Q(t) = A \phi \alpha t_p^{n-1} \frac{t}{t_c}$

fino a

$$Q_{maxA} = A \phi \alpha t_p^n \frac{1}{t_c}$$

CASO B  
 il massimo corrisponde al  $t_p = t_c$  con

$$Q_{maxB} = A \phi \alpha t_p^{n-1}$$

CASO C  
 la portata massima si ha il  $t_c$

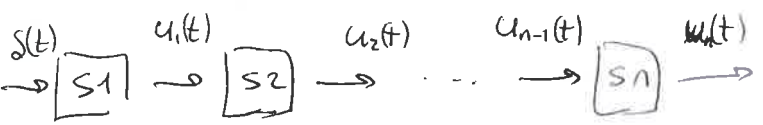
$$Q_{maxC} = A \phi \alpha t_p^{n-1}$$

- \* l'altro fattore è la partecipazione dell'area del bacino:
  - per piogge intensi e brevi (A) non partecipa tutto il bacino;
  - per piogge leggere e lunghe (C) partecipa tutto ma con intensità minore.
  - ⇒ Il caso peggiore (B) vede il tempo di pioggia corrispondere al tempo di corruzione ( $t_p = t_c$ ).

**COMBINAZIONE MODELLI DIVERSI**

Analizzando un bacino con modelli diversi per rispetto delle condizioni iniziali, si pongono in serie o in parallelo:

**SERIE**



CONVOLUZIONE degli elementi

$$u(t) = u_1(t) * u_2(t) * \dots * u_n(t)$$

$$u_{12}(t) = u_1(t) * u_2(t) = \int_0^t u_1(t') \cdot u_2(t-t') dt'$$

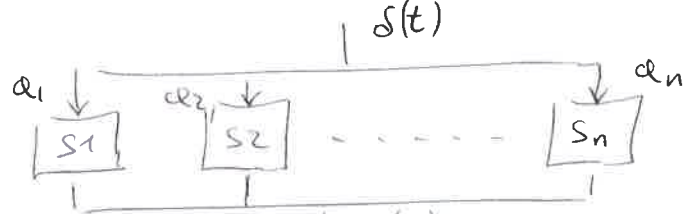
$$u_{123}(t) = u_{12} * u_3 = \int_0^t u_{12}(t') \cdot u_3(t-t') dt'$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_0^t \prod_{i=1}^n u_i(t-t') dt'$$

oppure trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[u(t) * \dots * u_n(t)] = \hat{u}_1(s) \dots \hat{u}_n(s)$$

**PARALLELO**



somme elementi, partizionati input

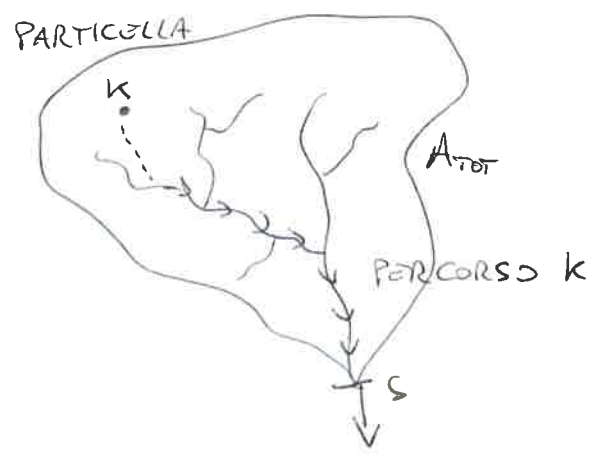
$$u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t)$$

noto che  $\int_0^\infty u_i(t) dt = 1$

$$\text{vale } u(t) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

\* **MODELLO GEOMORFOLOGICO** \*

Modello flessibile che si adatta sia al modello dell'inverso sia al modello cinematico nelle condizioni di limite  
 ipotesi: precipitazione istantanea e volume unitario  $S(t)$





La precipitazione è data da  $M$  particelle  $k$ -esime, con  $(t_k)$  tempo di residenza in bacino fino a (s) sezione -

ipotesi:  $k \in [1; M]$  indipendenti fra loro

$t_k$  indipendente da portata e acqua

$$I_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_k \geq t & k \text{ in bacino} \\ 0 & \text{se } t_k < t & k \text{ fuori} \end{cases}$$

volume interno al bacino  $v(t) = \frac{1}{M} \cdot \sum_k^M I_k(t)$    
  $\nearrow$  grande,  $t$  piccoli   
  $\searrow$  piccolo,  $t$  grandi

Com  $M \rightarrow \infty$  si ottiene il valore atteso e la probabilità di superamento:  $E[T] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_k^n I_k(t) = P(T > t)$

Bilancio di massa  $\rightarrow$  funzione di trasferimento = densità di probabilità di residenza in bacino   
  $\frac{d}{dt} v(t) = S(t) - u(t) \rightarrow u(t) = p(t)$

$\Delta$  In ipotesi ogni particella ha la stessa probabilità nel bacino, ma in realtà influenza l'età della acqua -

Si considera l'area contribuyente di ogni particella ed il relativo percorso nei canali. Ne consegue un tempo di residenza nei canali  $(T_k)$ .



$$F(T_k) = f_{A_k} * f_{c_k} * f_{c_k} \dots f_{c_{nk}} = u_k(t)$$

CONVOLUZIONI

tipi di particelle  $\rightarrow$  deflusso rapido,  $t$  corto  $\rightarrow u_k^s(t)$    
  $\rightarrow$  deflusso lento,  $t$  lungo  $\rightarrow u_k^p(t)$

Nella convoluzione cambia solo la densità relativa all'area contribuyente  $f_{A_k}^s$  oppure  $f_{A_k}^p$

rapida  $Q_k^s(t) = A_k \int_0^t J_{eff,k}^s(t') \cdot u_k^s(t-t') dt'$

Portate  $\rightarrow$

lenta  $Q_k^p(t) = A_k \int_0^t J_{eff,k}^p(t') \cdot u_k^p(t-t') dt'$

$\Rightarrow$  Portata complessiva  $Q(t) = Q_k^s(t) + Q_k^p(t)$

Per ipotesi  $J_{eff}$  ~~e~~ uguale in tutto il bacino

$$Q(t) = \underbrace{\int_0^t J_{eff}^s(t') \left\{ \sum_k^N A_k u_k^s(t-t') \right\} dt'}_{\text{portata rapida}} + \underbrace{\int_0^t J_{eff}^p(t') \left\{ \sum_k^N A_k u_k^p(t-t') \right\} dt'}_{\text{portata lenta}}$$

con la frazione di bacino  $P_k = \frac{A_k}{A}$

$$Q(t) = A \int_0^t J_{eff}^s(t') \cdot u^s(t-t') dt' + A \int_0^t J_{eff}^p(t') \cdot u^p(t-t') dt'$$

funzioni di Trasferimento  $\left\{ \begin{array}{l} u^s(t) = \sum_k^N P_k u_k^s(t) \\ u^p(t) = \sum_k^N P_k u_k^p(t) \end{array} \right.$

\* canali in serie  $\left( \Rightarrow \begin{array}{c} C^s * C^s * C^s * \dots \\ + \\ C^p * C^p * C^p * \dots \end{array} \right)$   
 Tipo di deflusso in parallelo

In singoli elementi morfologici

$$F_{Ak}^j = \frac{1}{K_{Ak}^j} e^{-\frac{t}{K_{Ak}^j}} \quad (\text{con } j = s, p)$$

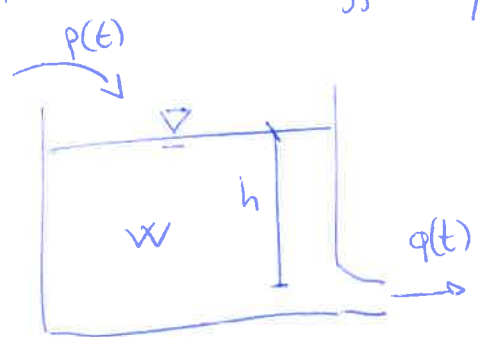
$$K_{Ak}^j = C_j \cdot A_k^{0,38} \quad \rightarrow \text{costanti} \quad \begin{array}{l} C_s = 2 \div 12 \text{ h/km}^{0,76} \\ C_p = 24 \div 72 \text{ h/km}^{0,76} \end{array}$$

$C_j$ : piccolo per bacino piccolo, grande per bacino grande

$\hookrightarrow$  PARAMETRI DA VARIARE ottenendo la gaussiana

$$f_c(t) = \frac{L}{\sqrt{4\pi D} t^3} \exp\left[-\frac{(L - \langle u \rangle t)^2}{4Dt}\right]$$

Il METODO DELL'INVASO LINEARE assomiglia al comportamento del bacino a quello di un serbatoio nel quale entra  $p$  ed esce  $q$ .  
 La portata  $p$  rappresenta la precipitazione meteorica, mentre la portata  $q$  è la portata attraverso la sezione di chiusura in seguito alle piogge. Lo scopo del metodo è di determinare la legge  $q = q(t)$ .



dato che  ~~$q = \mu \sqrt{2gh}$~~  si assume  $q = f(h(w))$  per la geometria  $q = f(w)$   
 ipotesi: ~~linearità~~ linearità  $w = kq$

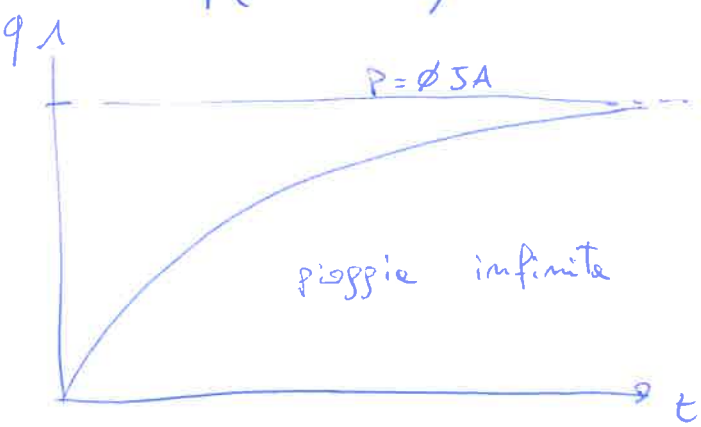
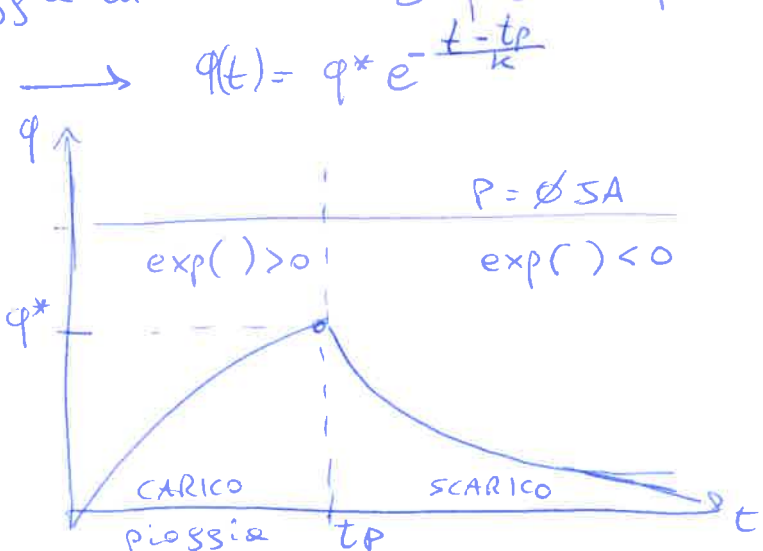
$k$  è stimata empiricamente  $k = 0,7 T_c$  (convezione)  
 ipotesi di sincronismo: quando in vasca entra un certo volume d'acqua il pelo libero si innalza in tutti i suoi punti contemporaneamente di stessa quantità, pertanto assimilare il comportamento della rete idrografica a quello del serbatoio vuol dire ammettere che i diversi rami si riempiono contemporaneamente.

La precipitazione è costante  $P = \phi SA$

CONTINUITA' :  $p dt - q dt = dw = k dq$   
 $\Rightarrow \frac{dt}{k} = \frac{dq}{P - q}$   $\left[ \begin{array}{l} t=0, q=q_0 \\ t=t, q=q \end{array} \right.$

La risposta del bacino ad una pioggia di intensità  $\phi$  per  $t$  infinito

$$q(t) = P(1 - e^{-\frac{t}{k}}) + q_0 e^{-\frac{t}{k}}$$

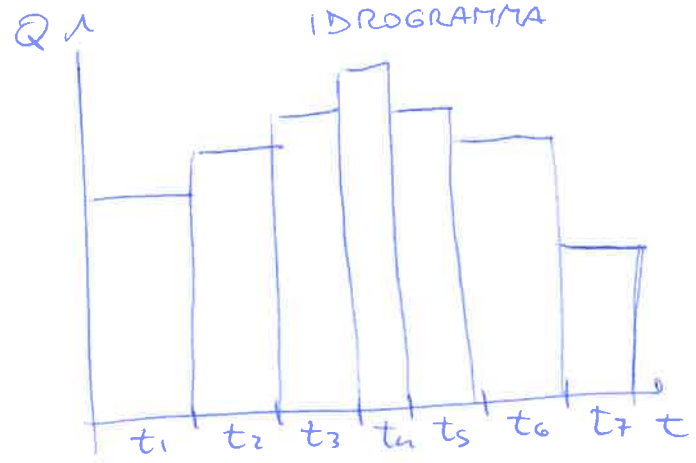
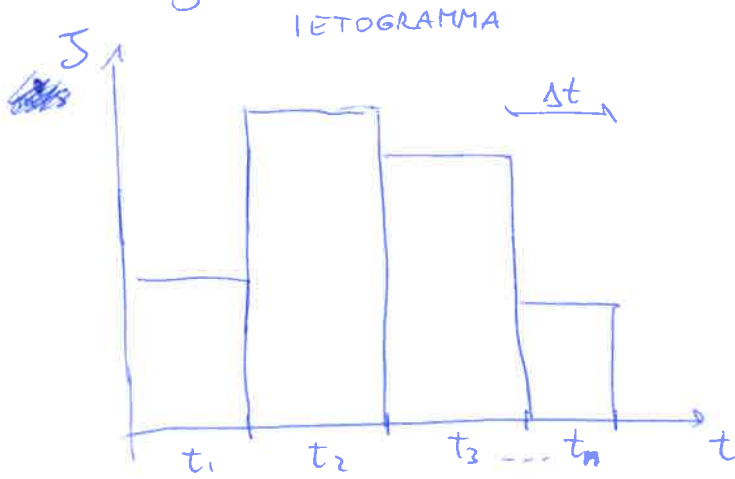


Il MODELLO DI NASH prevede una risposta impulsiva con una funzione esponenziale  $h(t) = \frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}}$ .

Risposta impulsiva di  $n$  serbatoi in serie  $\rightarrow$  convoluzione di  $n$  funzioni

$\Rightarrow$  funzione gamma  $h(t) = \frac{1}{k} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-t/k}$

I parametri  $n$  e  $k$  si calcolano disponendo di uno ietogramma e uno idrogramma:



Momenti:  $M_{I1}, M_{I2}$

$M_{Q1}, M_{Q2}$

quindi  $M_{I1} - M_{Q1} = nk$ ;  $M_{I2} - M_{Q2} = n(n+1)k^2 + 2nkM_{I1}$

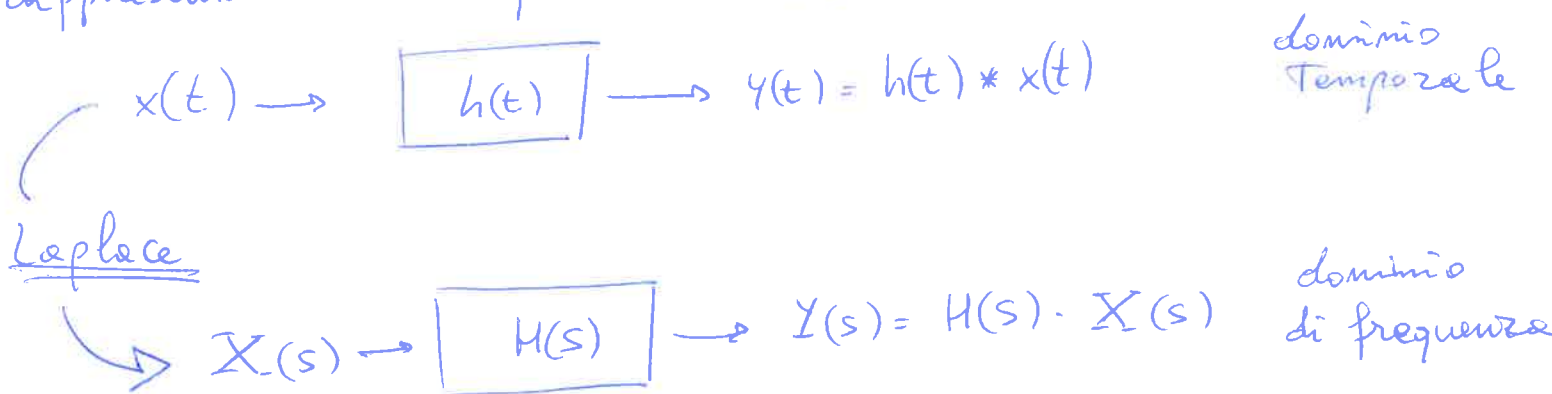
modello empirico

$$h_p = 1,31 R_L^{0,43} \cdot \frac{V}{Lr}$$





La FUNZIONE DI TRASFERIMENTO caratterizza il ~~trasferimento~~ comportamento di un sistema dinamico tempo-invariante nel dominio della frequenza, mettendo in relazione l'ingresso e l'uscita. Di un sistema dinamico lineare stazionario (LTI) è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema; si tratta della funzione di rete che esprime la relazione algebrica tra ingresso e uscita nel dominio delle frequenze, caratterizzando il sistema in modo equivalente a quello fornito dalla rappresentazione in spazio di stato.



trasformazione di Laplace della funzione:

$$f(t) \rightarrow \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f]$$

$$\text{quindi } \hat{u}(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} e^{-(s+\frac{1}{k})t} dt = - \frac{1}{k(s+\frac{1}{k})} e^{-(s+\frac{1}{k})t} \Big|_0^{\infty}$$

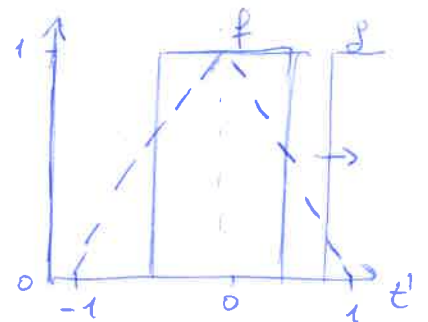
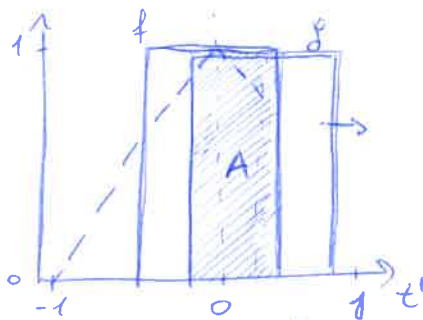
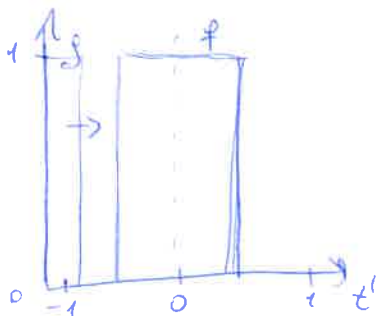
$s=0$

La CONVOLUZIONE è un'operazione tra due funzioni di una variabile che consiste nell'integrare il prodotto tra la prima e la seconda traslate di un certo valore. In sistemi dinamici lineari stazionari, l'uscita è data dalla convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta all'impulso del sistema, la cui trasformata di Laplace è la funzione di Trasferimento del sistema.

Per due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' \quad \text{integrale del prodotto delle due}$$

funzioni dopo che una delle funzioni di partenza è stata rovesciata e traslata.



Impulsi  $f$  e  $g$  di pari lunghezza: la forma  $f * g$  è triangolare. È il prodotto tra  $f$  e  $g$  riflesse a  $t'=0$  e traslate di  $t$ , ottenendo  $f(t') g(t-t')$ . L'Area del prodotto  $A$  è l'integrale di convoluzione. Nell'asse orizzontale figurano i valori della variabile  $t'$  per rappresentare  $f$  e  $g$  in  $t$  per  $f * g$ . Se i due segnali avessero lunghezza differente la convoluzione genererebbe la funzione trapezio.

MODELLI AFFLUSSO - DEFUSSO

INVASO LINEARE

MODELLO DI NASH

MODELLO CINEMATICO

MODELLO GEOMORFOLOGICO

$f(t_p)$

$f(t_p, T(n))$

$f(t_c)$

$f(C_p, C_s)$

$Q_{max} = \phi A \alpha t_p^{n-1} [1 - e^{-t_p/k}]$

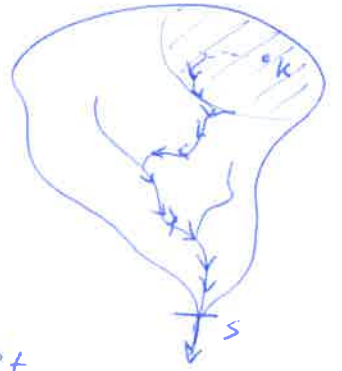
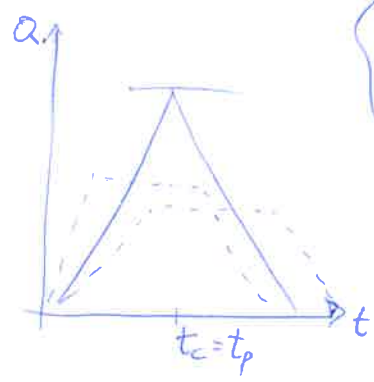
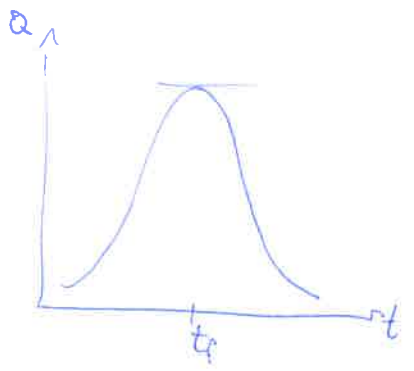
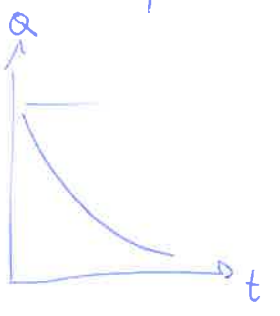
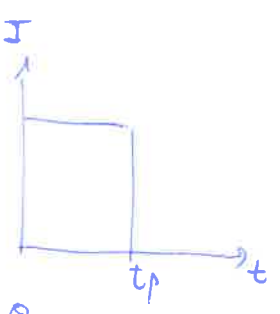
$Q_{max}(t) = \phi A \alpha t_p^{n-1}$

$Q_{max}(t) = A \int_T S^S U^S + A \int_T S^P U^P$

$q_n(t) = \frac{1}{(n-1)! k} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k}$

$Q_{max}(t) = \phi A \alpha t_p^{n-1} \left\{ 1 - \frac{T(n, t/k)}{T(n)} \right\}$

(con GIUH)



L'IDROGRAMMA UNITARIO ISTANTANEO (IUH) è l'idrogramma delle portate di piena, conseguente ad una precipitazione netta di volume unitario e di durata infinitesima, con caratteristica di immissione impulsiva.

delta di Dirac  $\int_0^+ S(t) dt = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \int_0^\infty h(t) dt = 1$

La generica pioggia può essere interpretata come una successione di precipitazioni nette elementari di durata infinitesima dt e di volume infinitesimo p dt. Si consideri l'effetto nell'istante t di una sollecitazione applicata all'istante  $\tau$  ed avente le caratteristiche di una pioggia impulsiva. Tale effetto sarà pari a  $h(t-\tau)$ .

Per ipotesi di linearità

$dy(t) = h(t-\tau) \cdot p(\tau) dt \quad \rightarrow \quad q(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) dt$

## 6. DIGHE E LAMINAZIONE

### FUNZIONE D'AMPIEZZA

È la densità di probabilità delle distanze della sezione di controllo misurate lungo la direzione di massima pendenza (pdf → probability density function)

Divide gli intervalli delle distanze dei punti reciproci, calcolando la frequenza relativa e la funzione di densità

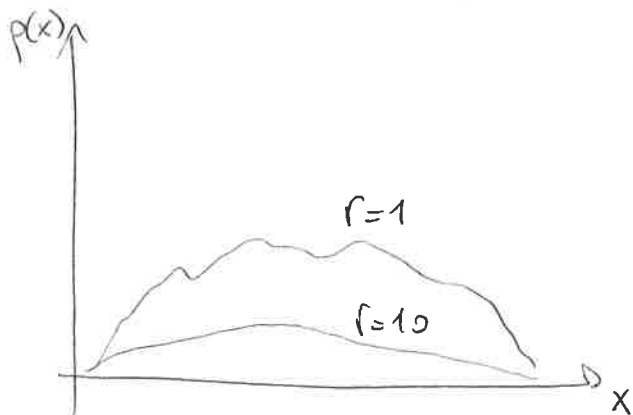
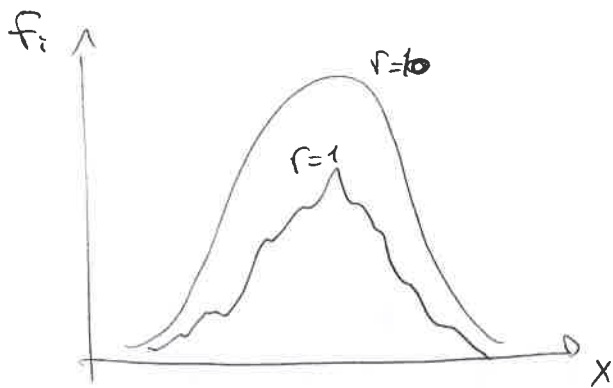
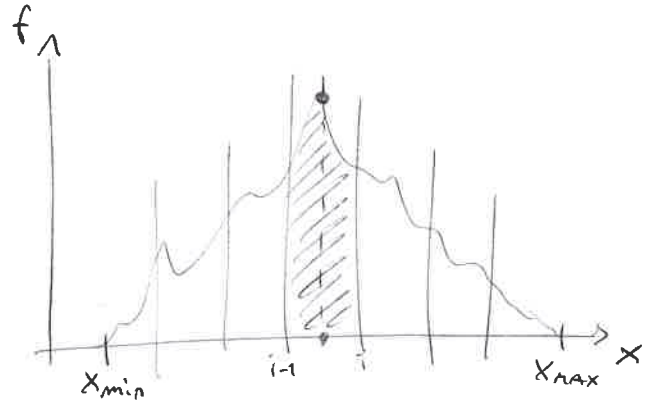
$$pdf = p(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{n_i / N_p}{x_i - x_{i-1}}$$

funzione di Trasferimento

dato che il tempo di residenza è  $T = \frac{x}{v}$  sia  $f(T) = \frac{p(x) dx}{dT}$

Allora  $P_i \approx p\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) = \frac{n_i}{N_p(x_i - x_{i-1})} \Rightarrow f_i$  nell'intervallo

→ Nel canale k-esimo  $\tau_k = \frac{1}{v_c} l'_{kc}$  dove i termini sommano la covarianza del versante e quella nel canale ⇒ distinzione con parametro  $r$



$$\begin{cases} r^S = \frac{v_c}{v_{vs}} & \text{rapido} \\ r^P = \frac{v_c}{v_{vp}} & \text{lento} \end{cases}$$

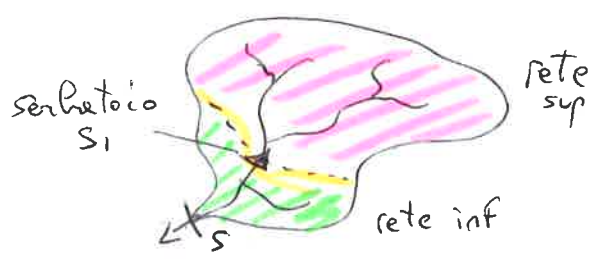
$$\tau_k = \frac{l_{kc}}{v_c} + \frac{l_{kv}}{v_v} = \frac{1}{v_c} \left[ l_{kc} + r l_{kv} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{l'_{kc}}$



**INSERIMENTO SERBATOIO** Per ridurre le ondate di piena nel lacino, dividendo il lacino in rete superiore e rete inferiore.

La sezione di chiusura S riceve dal serbatoio S<sub>1</sub> e dalla rete inferiore.



S<sub>1</sub> riceve solo dalla rete superiore

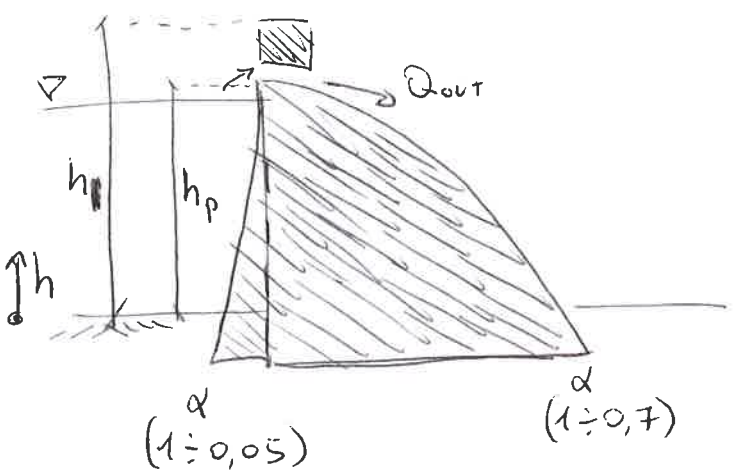
⇒ Nel serbatoio S<sub>1</sub>:  $Q_{in}(t) - Q_{out}(t) = \frac{dV}{dt}$

quindi  $Q_{S_1}(t) = \int_0^t Q_{out}(t') \cdot u_{II}(t-t') dt'$  scarico della sezione

e  $u_{II}(t-t') = f_{II1} * f_{II2} * \dots * f_{II n}$  della rete inferiore

↳ Il serbatoio S<sub>1</sub> è regolato dal tirante h

$\frac{dV}{dt} = A(h) \frac{dh}{dt}$ , quindi  $Q_{out}(h) = C_q(\omega) \cdot L \cdot \sqrt{2g} [h(t) - h_p]^{3/2}$   
SCARICO DA SFIORATORE



$h_p$  = quote massima di regolazione  
 $h$  = quote massimo invaso

La variazione della superficie è approssimata ad un polinomio di III grado

$A(h) = \frac{dV}{dh} = 3a \cdot h^2 + 2b \cdot h + c$

quindi  $\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{in}(t) - Q_{out}(t)}{A(h)} = F[h, t]$

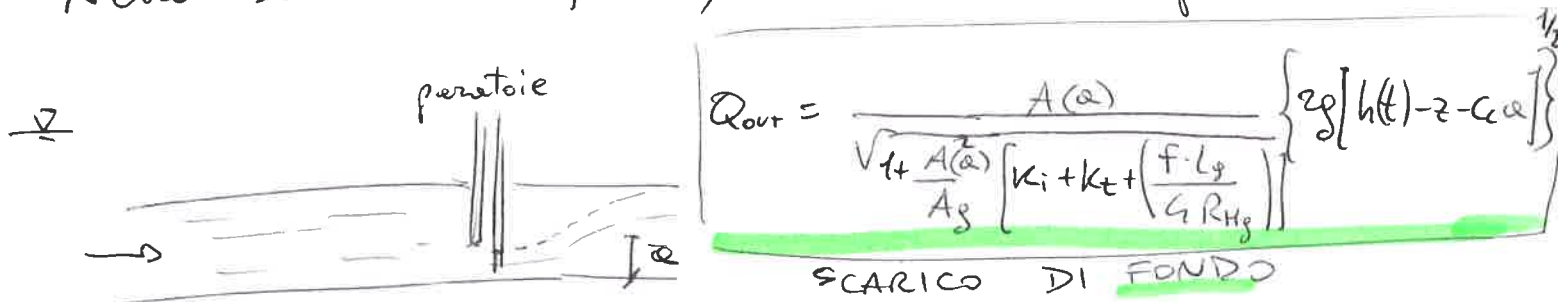
La soluzione numerica è  $\left\{ \begin{aligned} h_i - h_{i-1} &= \frac{\Delta t}{2} \{ F[h_i, i\Delta t] + F[h_{i-1}, (i-1)\Delta t] \} \\ h(t=0) &= h_0 \end{aligned} \right\}$

Impostando un valore di tolleranza per il metodo di Newton o bisezione, si ottiene per  $k$  iterazioni

$$h_i^k = h_i^{k-1} - \frac{R[h_i^k]}{R'[h_i^{k-1}]} \quad \text{dove } R_i = \text{funzione di } h_i$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dF}{dh} \right|_{h_i^{k+1}} = \frac{1}{A(h_i^{k+1})} \left\{ \frac{d}{dh} Q_{out}(h) \right|_{h_i^{k+1}} + F[h_i^{k+1}, i \Delta t] \frac{dA}{dh} \Big|_{h_i^{k+1}} \right\}$$

• Nello scarico di fondo, il canale è in pressione

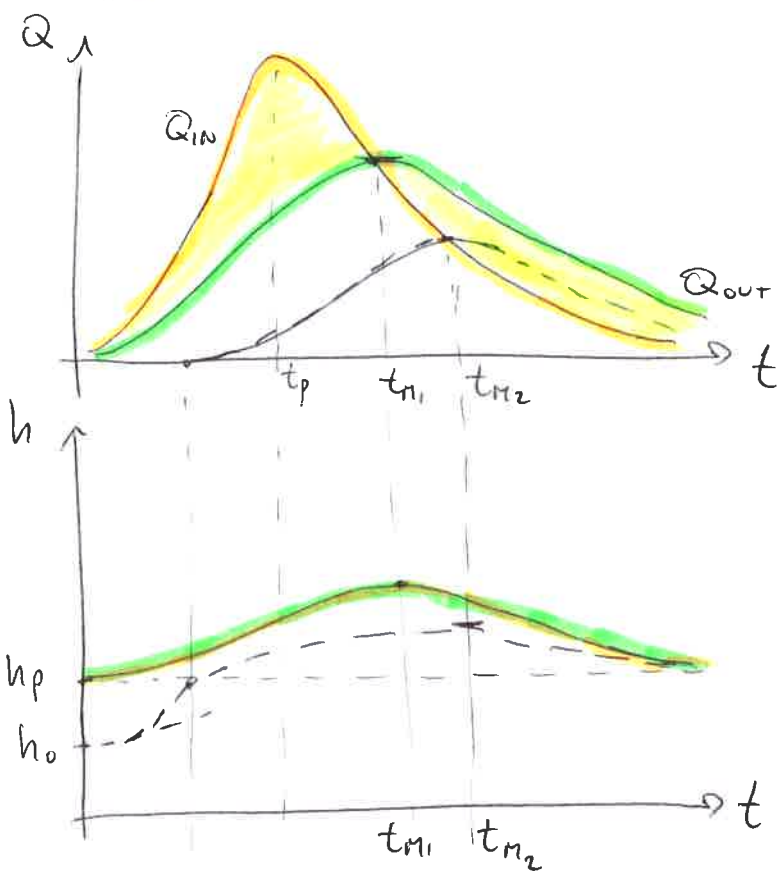


dove i coefficienti  $K$  valutano le perdite, si nota che a monte della paratoie si ha canale in pressione, con passaggio dato dalle linee di fondo, e valle della paratoie si ha canale a pelo libero.

## CLASSIFICAZIONE DIGHE

- in calcestruzzo - [ a gravità  
a volte
- materiali sciolti
- traverse fluviali
- miste

**LAMINAZIONE** delle piene



Quando  $Q_{in} > Q_{out}$  avviene innalzamento  
 Quando  $Q_{in} < Q_{out}$  avviene lo svuotamento

se il tirante parte da  $h_0 < h_p$  si ha una portata massima inferiore

\* la laminazione regola le portate di piene con la gestione dello sfioratore del serbatoio, abbassando la  $Q_{max}$  e ritardandola.

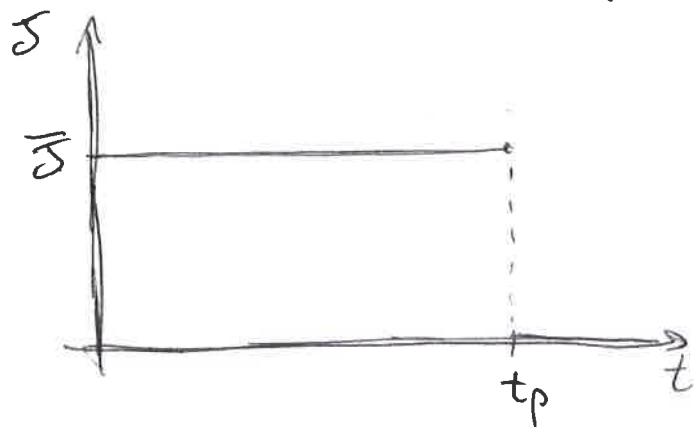
La  $Q_{in}$  dipende dall'idrologia: applicano le funzioni statistiche per ricercare la funzione di un modello simile alla realtà. Tramite la varianza dell'errore è possibile valutare la previsione del modello. Si riduce l'errore tramite il coefficiente di Nash-Sutcliffe (1970).

$$L = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_0^2}$$

se  $\begin{cases} L \rightarrow 1 & \text{modello perfetto} \\ L \rightarrow 0,5 & \text{modello sufficiente} \\ L \rightarrow 0 & \text{modello pessimo} \\ L < 0 & \text{modello sbagliato} \end{cases}$

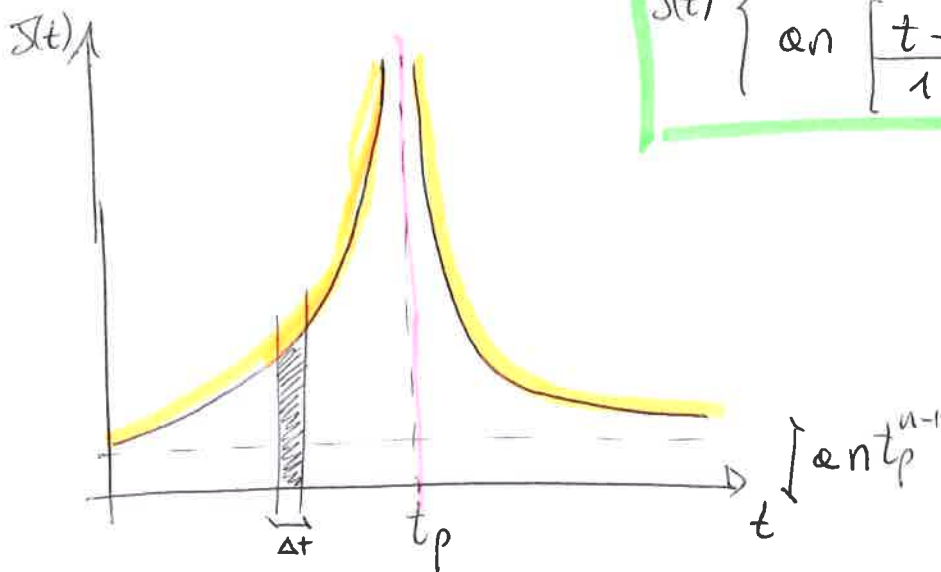
$\Rightarrow$  **CALIBRAZIONE** Ricerca dei parametri per avvicinare il modello alla realtà  $\rightarrow$  funzione obiettivo.

ipotesi di intensità di pioggia costante



$$J(t) = \begin{cases} \alpha(t_r) t_p^{n-1}, & t \leq t_p \\ 0, & t > t_p \end{cases}$$

→ **IETOGRAMMA di CHICAGO** Traslando la curva data per ipotesi di intensità in riduzione nel tempo.



$$J(t) = \begin{cases} \alpha n \left[ \frac{r t_p - t}{r} \right]^{n-1}, & t \leq t_p \\ \alpha n \left[ \frac{t - r t_p}{1-r} \right]^{n-1}, & t > t_p \end{cases}$$

La curva viene discretizzata in  $\Delta t$  calcolandone l'area

$$\delta_i = \frac{\alpha \Delta t^{n-1}}{r^{n-1}} \left\{ [r n p - i + 1]^n - [r n p - i]^n \right\}$$

→ Area complessiva è data dalla sommazione di ogni intervallo  $\Delta t$ .



Lo SFIORATORE in ingegneria idraulica è un dispositivo usato per smaltire la parte delle acque ~~in~~ di un bacino o di una canalizzazione in eccesso rispetto a un livello prefissato. Nelle dighe è spesso affiancato da scarichi di fondo.

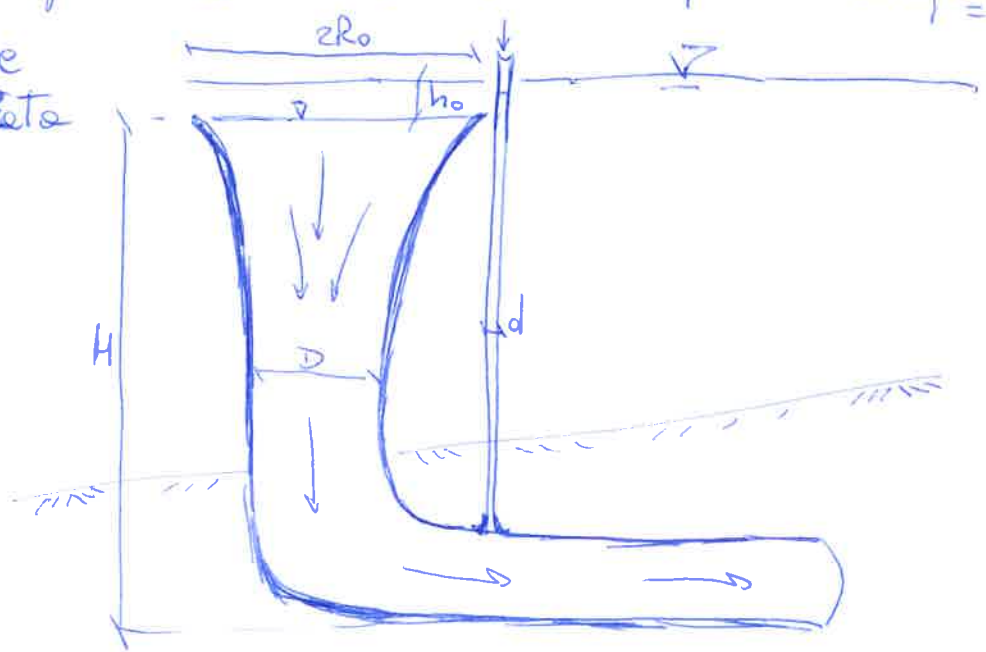
Il dimensionamento usa metodi semiempirici. Nel caso di dighe in Terra lo sfioratore è ~~affiancato~~ costituito da una struttura indipendente del corpo della diga. Se sottodimensionato può provocare l'erosione del paramento della diga da parte delle acque in piena con il possibile sedimentazione della diga stessa.

Nelle dighe in muratura viene invece spesso realizzato sul coronamento della diga. Il flusso è regolato da paratoie.

Gli sfiatori a calice ~~scavano~~ possono funzionare a stramezza o a battente. Infatti, come il battente d'acqua ~~e le~~ ~~capacità di scarico del serbatoio, tramite lo sfioratore~~

aumenta ulteriormente, il pozzo risulterà completamente pieno d'acqua e le capacità di scarico del serbatoio, tramite lo sfioratore a calice, saranno quelle tipiche del flusso attraverso una tubazione. Il passaggio da un tipo di funzionamento all'altro (saturazione) è gestito dai fenomeni pneumatici dovuti all'aria trasportata dalle correnti:

questo passaggio è particolarmente delicato perché comporta una diminuzione della portata scaricata e perdita di carico idraulico sullo sfioratore.



↳ Un invaso artificiale è realizzato mediante una diga in materiali sciolti, fornita di scaricatore di fondo.

È suddiviso in due tratti la prima curvilinea, la seconda suborizzontale e valle delle paratoie di regolazione. Si deve verificare che le dimensioni dell'opera siano sufficienti a garantire il normale funzionamento dell'opera in condizione di piena eccezionale con serbatoio pieno al livello di massimo invaso.

→ PORTATA SFIORATORE

$$Q(h) = C_g \cdot e \cdot L \sqrt{2g (h(t) - h_p)^3}$$

→ PORTATA SCARICO DI FONDO

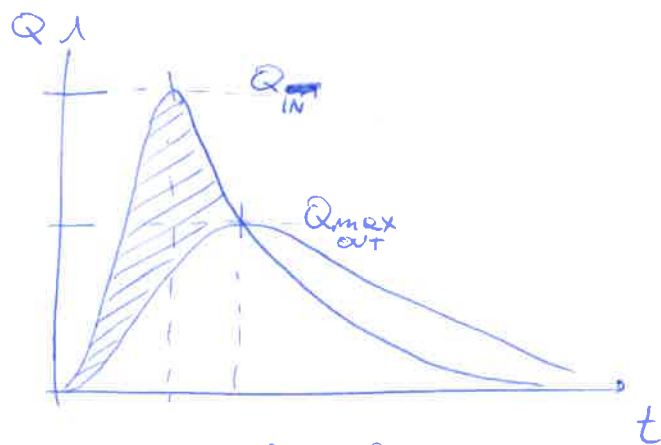
$$Q(h) = \frac{A(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{A(\alpha)^2}{A_g^2} \left[ k_i + k_t + \left( \frac{F \cdot L_g}{4 R_{H_g}} \right) \right]}} \sqrt{2g [h(t) - z - C_c \cdot \alpha]}$$

La LAMINAZIONE dinamica è la causa del fenomeno agli invasi in cui si ha una diminuzione delle portate scaricate rispetto a quelle in arrivo, dovute all'accumulo di un volume d'acqua nel serbatoio quando il livello sale sulle soglie sfiorante. La portata è infatti

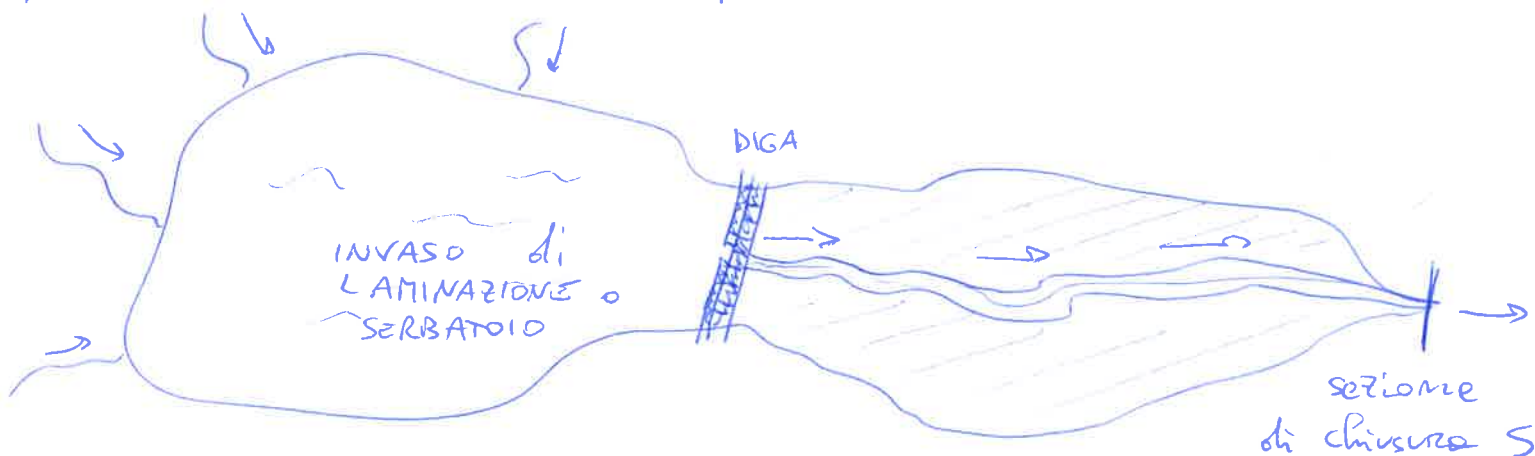
$$Q_{out}(t) = \mu \cdot L \cdot h(t)^{3/2} \cdot \sqrt{2g}$$

Ad ogni aumento di  $Q_{out}$ , corrisponde un aumento di  $h(t)$ , cioè dell'altezza della lama d'acqua sfiorante, e per tanto di lunghezza  $L$  della soglia di sfioro e quindi di volume invaso nel serbatoio.

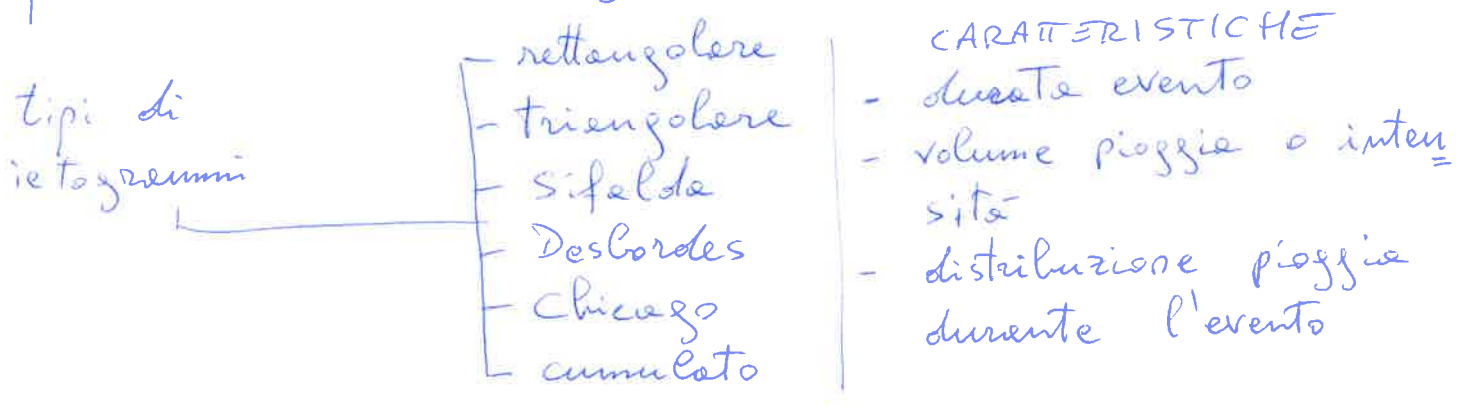
Alle diminuzioni della punta massima di portata dell'ondata di piena corrisponde necessariamente un prolungamento della coda della piena.



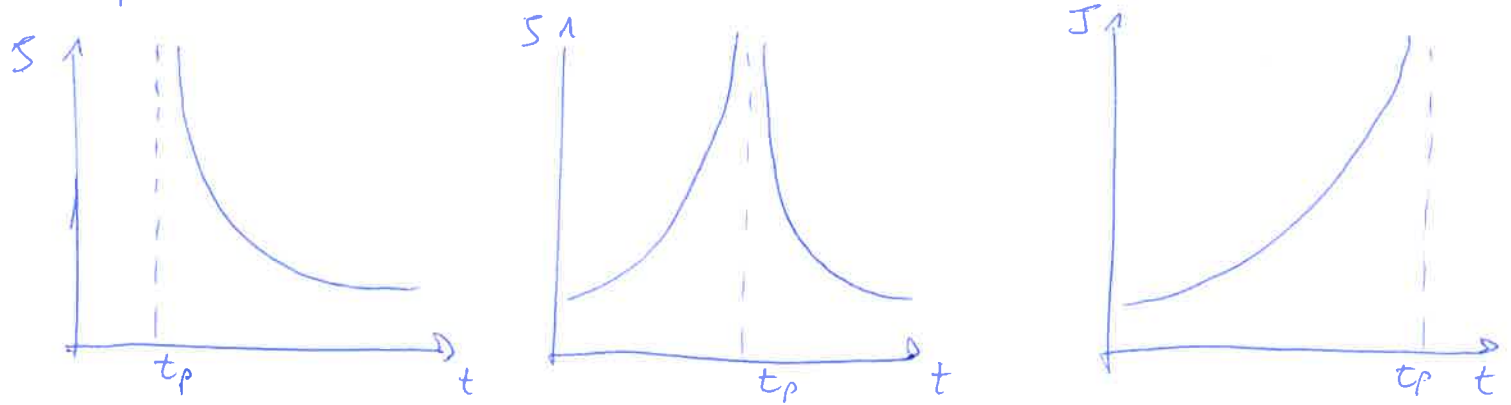
È ovvio che l'effetto di laminazione è anche funzione diretta dell'ampiezza della superficie libera del bacino. Un aumento dell'effetto laminante si potrebbe ottenere anche riducendo la lunghezza della soglia di sfioro, con conseguente aumento dell'altezza di sfioro e quindi di volume contemporaneamente invaso.



Uno IETOGRAMMA è un modello più o meno complesso, ideato per ottenere, in maniera univoca e riproducibile, l'evoluzione temporale di un fenomeno naturale: la pioggia o più precisamente di un singolo evento di pioggia -

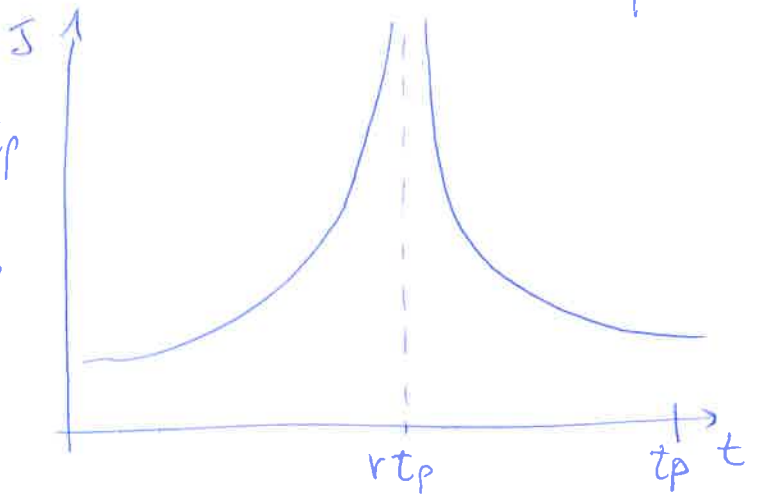


\* Lo I. Chicago è uno ietogramma non costante che presenta un picco di intensità che può essere posizionato arbitrariamente all'inizio dell'evento, alla fine, o in posizione intermedia. La massima altezza di precipitazione cumulata su qualsiasi durata  $\tau$  è sempre pari all'altezza di precipitazione dedotta dalle curve di possibilità pluviometrica per la medesima durata  $\tau$ .



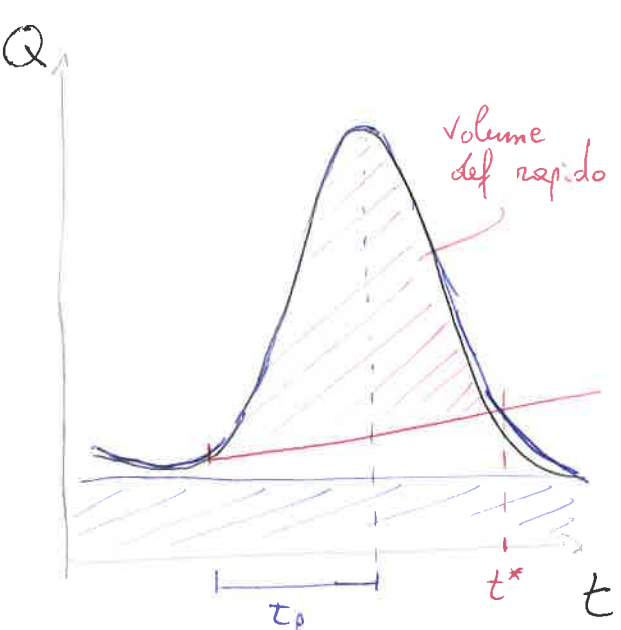
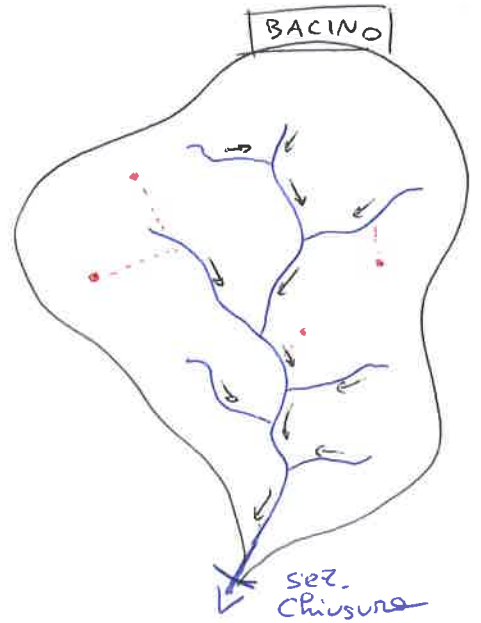
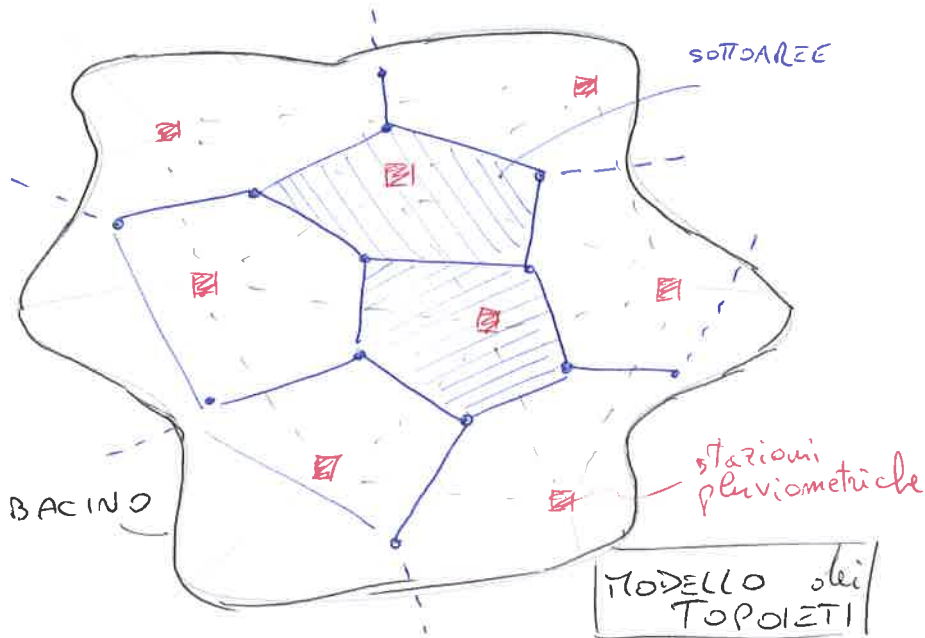
si fissa un valore per il parametro  $0 \leq r \leq 1$ , cioè la posizione relativa del picco.

$$I(t) = \begin{cases} n a \left[ \frac{r t_p - t}{r} \right]^{n-1}, & t < r t_p \\ n a \left[ \frac{t - r t_p}{1 - r} \right]^{n-1}, & t > r t_p \end{cases}$$

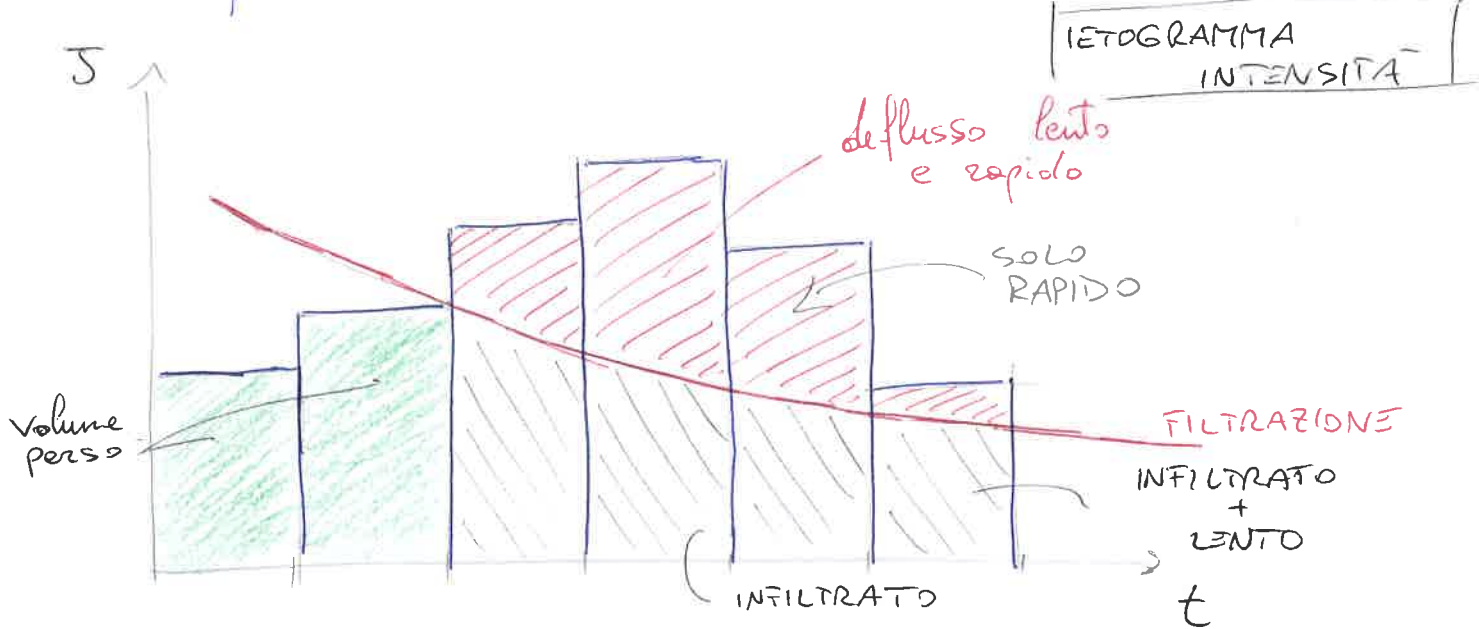


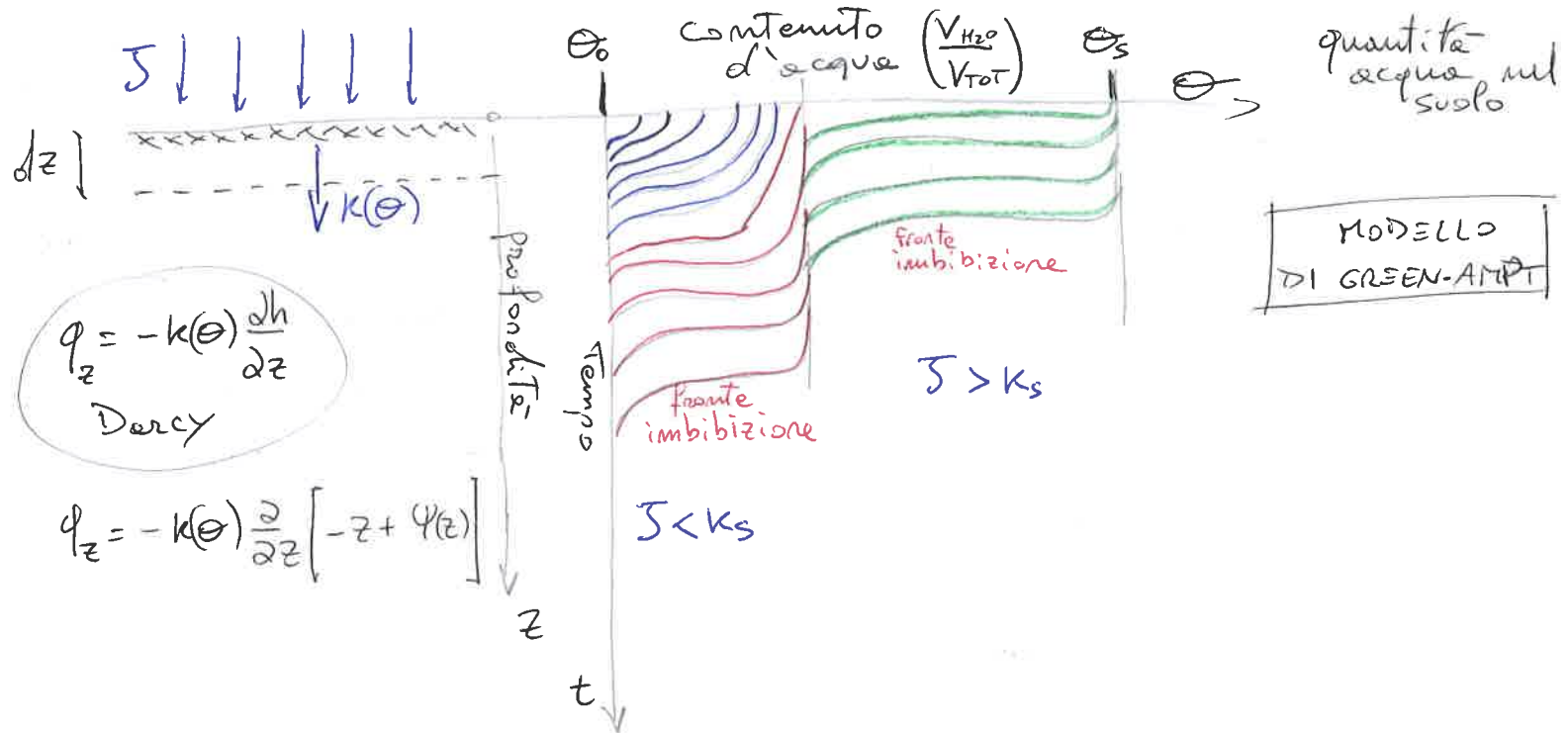


# GRAFICI MODELLI



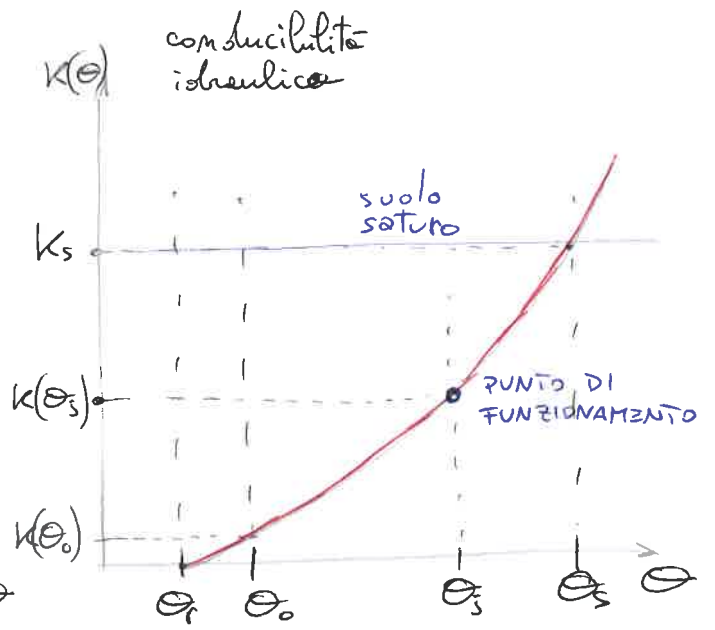
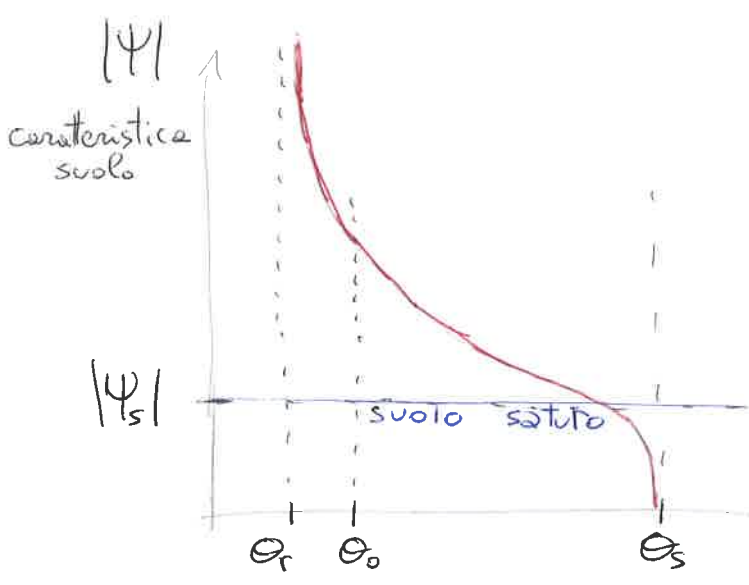
ONDA di PIENA



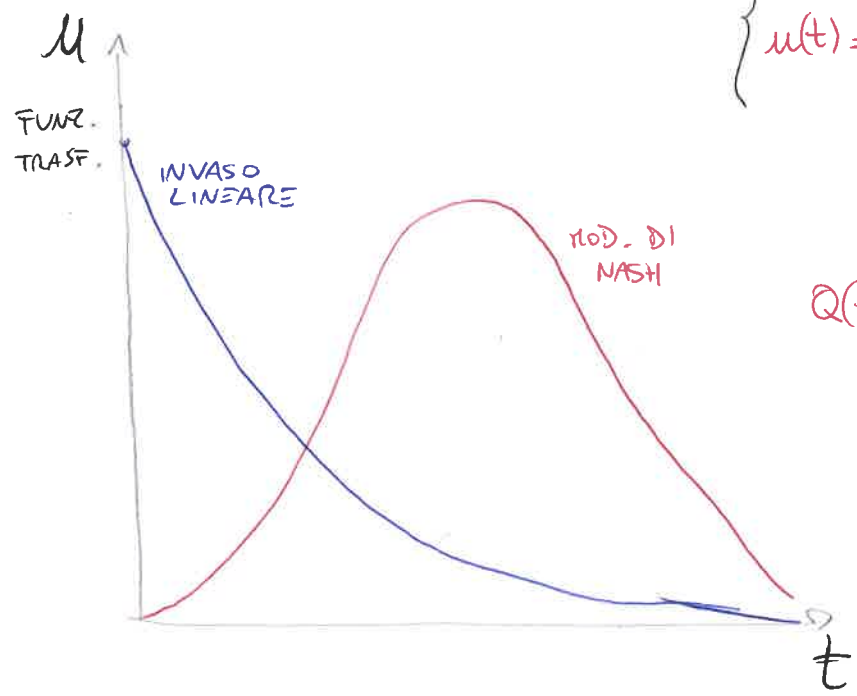


$q_z = -k(\theta) \frac{dh}{dz}$   
 Darcy

$q_z = -k(\theta) \frac{\partial}{\partial z} [-z + \psi(z)]$

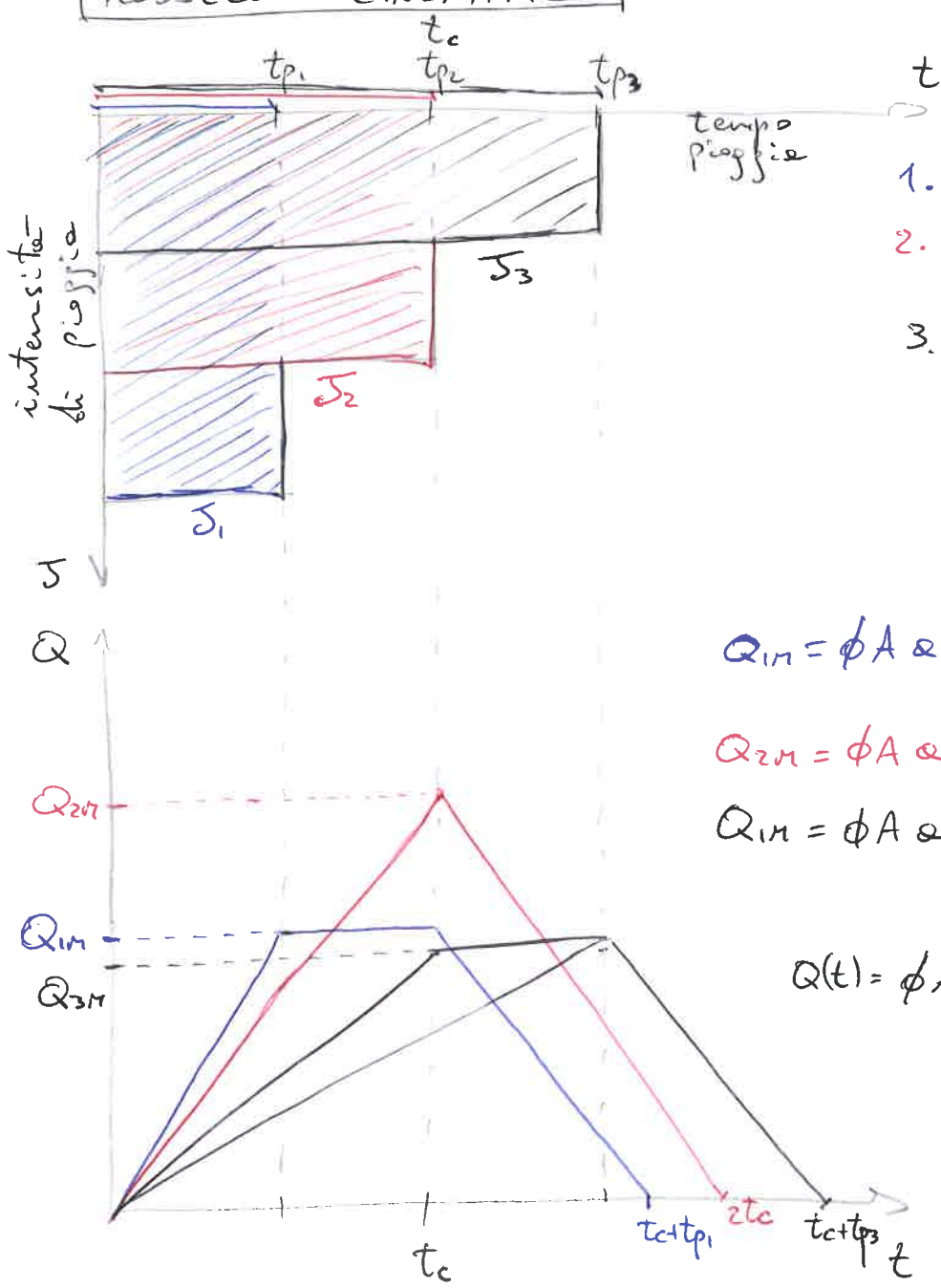


$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k} & (k) \\ u(t) = \frac{1}{\Gamma(n) \cdot k} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \cdot e^{-t/k} & (n, k) \end{cases}$$



$Q(t) \left\{ \begin{aligned} & A \phi \bar{S} \left\{ \frac{\Gamma(n) - \Gamma(n, t/k)}{\Gamma(n)} \right\} \\ & A \phi \bar{S} \left\{ \frac{\Gamma(n, t - t_p/k) - \Gamma(n, t/k)}{\Gamma(n)} \right\} \end{aligned} \right\}$

MODELLO CINEMATICO



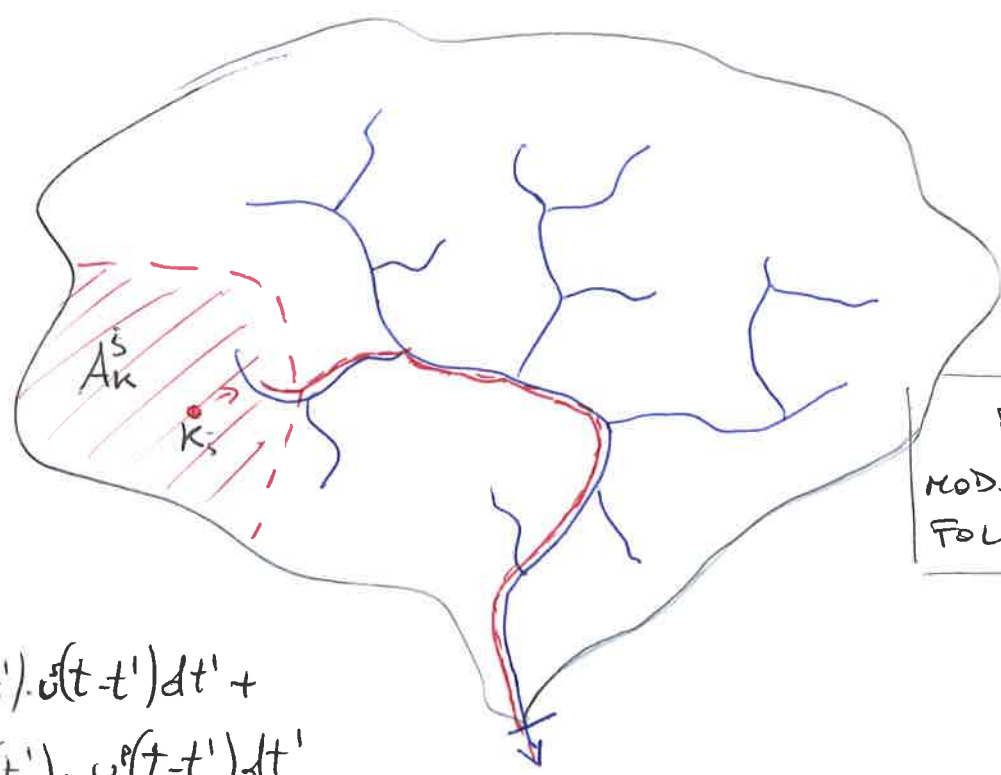
1. PIOGGIA INTENSA BREVE
2. PIOGGIA MEDIA FINO A CORRIVAZIONE
3. PIOGGIA DEBOLE LUNGA

$$Q_{1M} = \phi A \alpha \frac{t_{p1}^n}{t_c}$$

$$Q_{2M} = \phi A \alpha t_{p2}^{n-1}$$

$$Q_{1M} = \phi A \alpha \frac{t_{p3}^n}{t_c}$$

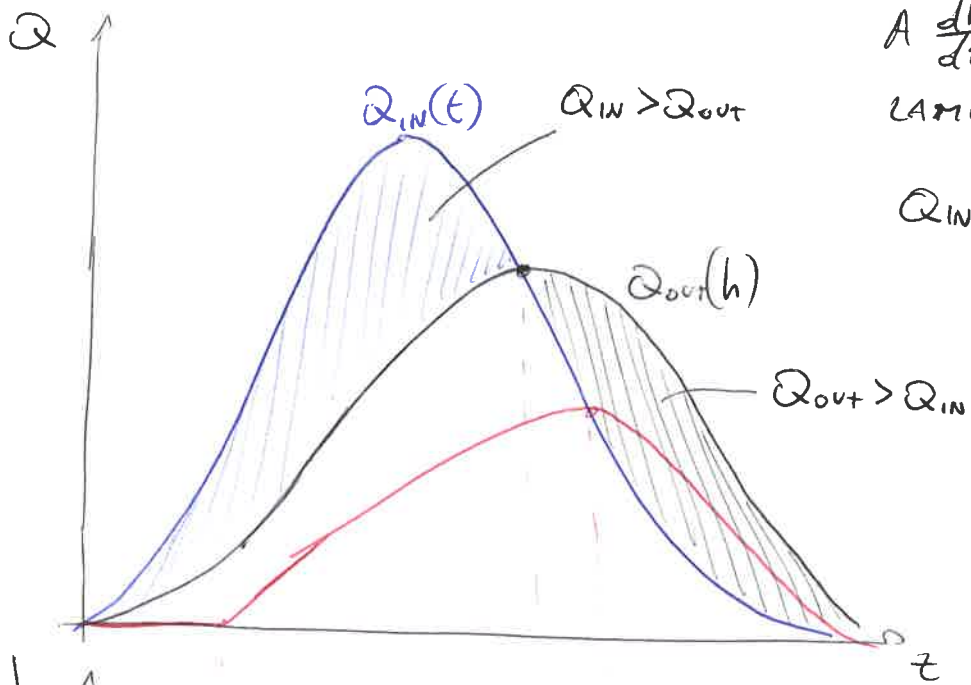
$$Q(t) = \phi A \alpha t_p^{n-1} \frac{1}{t_c} \int_0^t dt$$



BACINO PER  
MODELLO GEOMOR-  
FOLOGICO

$$Q(t) = A \int_0^t \delta_{eff}^S(t') \cdot v^S(t-t') dt' + A \int_0^t \delta_{eff}^P(t') \cdot v^P(t-t') dt'$$

LAMINAZIONE

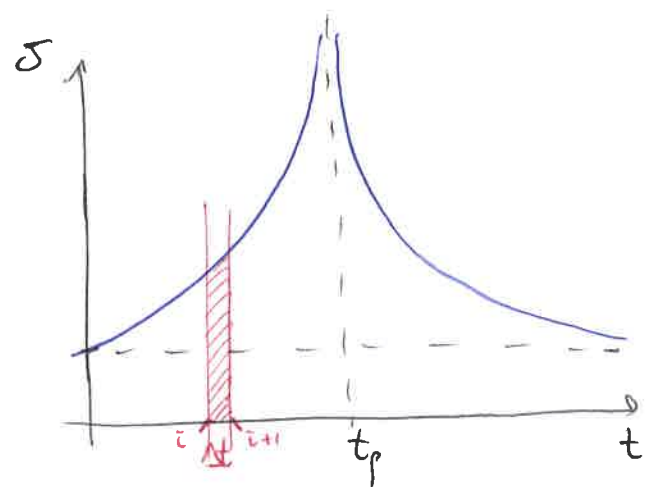
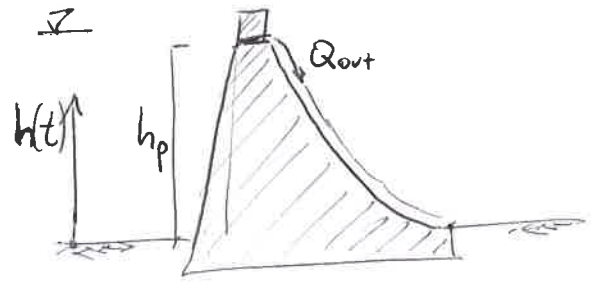
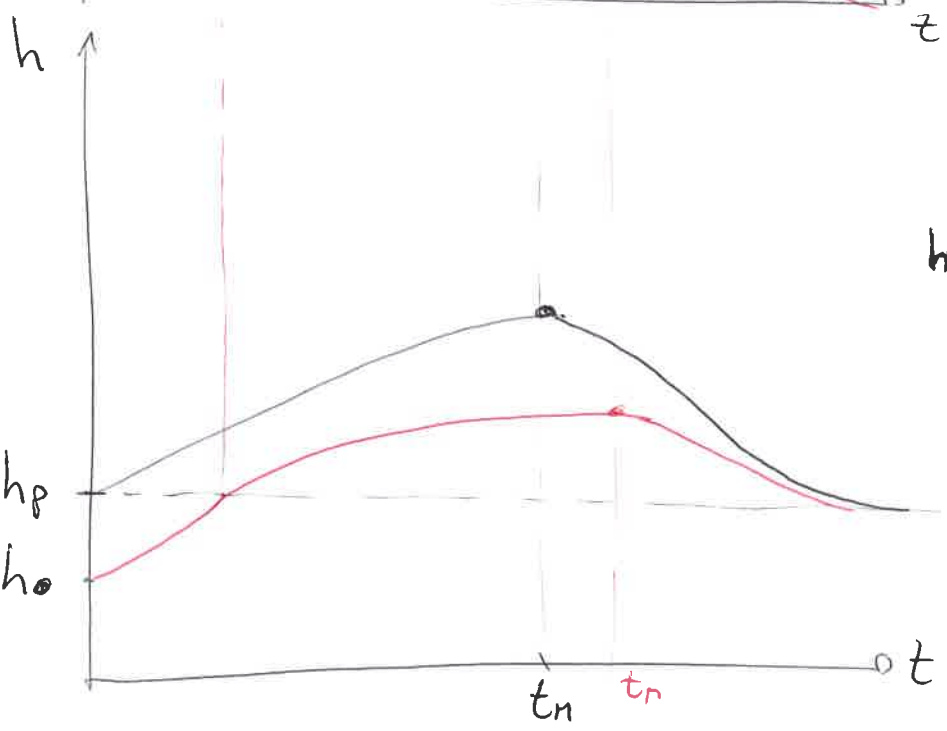


$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(h)$$

LAMINAZIONE  $\frac{dh}{dt} A = 0$

$$Q_{in}(t) = Q_{out}(h) \leftarrow \text{massimo}$$

$$\text{Vol}_{in} = \text{Vol}_{out}$$



ISTOGRAMMA DI CHICAGO

$$J(t) \begin{cases} \left[ \frac{en}{r} \left| \frac{r t_p - t}{r} \right|^{n-1} & t < t_p \\ \left[ \frac{en}{1-r} \left| \frac{t - r t_p}{1-r} \right|^{n-1} & t > t_p \end{cases}$$

discretizzazione

$$J_i = \frac{a \Delta t^{n-1}}{r^{n-1}} \left\{ [r n_p - i + 1]^n - [r n_p - i]^n \right\}$$