

I ANNO

II semestre

1. IDRODINAMICA

- MOTI A SUPERFICIE LIBERA
- CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA
- CORRENTI STAZIONARIE
- CORRENTI NON STAZIONARIE

2. ACQUEDOTTI e FOGNATURE

- LEGGI IDRAULICHE
- ACQUEDOTTI
- FOGNATURE
- DISIGNI e DETTAGLI
- MATERIALI

MOTI A SUPERFICIE LIBERA

MODELLO 3D

• BILANCIO DI MASSA $\frac{dM}{dt} = 0$ $M = \rho V \rightarrow M(t) = \rho V(t)$

$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$ volume cambia nel tempo

Formulazione integrale, con massa che entra e che esce attraverso la frontiera

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$
volume attraverso la superficie

Formulazione locale, dal Th. di Gauss

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla(\rho \vec{v}) dV = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0$ per fluido incomprimibile $\rho \rightarrow \text{cost}$

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

divergenza del vettore velocità nulla

• BILANCIO DI QUANTITÀ DI MOTO $\frac{dq}{dt} \neq 0$

$\rho q = V \rho \vec{v} = M \vec{v}$

$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \oint_S \vec{F} dS$
gravità forze superficie

Formulazione integrale

Analisi sul volume interno v' , con tensioni di Cauchy \vec{T}

$\int_{v'} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dv' = \int_{v'} \rho \vec{f} dv' + \oint_{S'} \vec{T} dS$
stato di tensione

nel volume infinitesimo

\vec{t} del continuo di Cauchy = $\mathbf{T} \cdot \hat{n}$ Tensore degli sforzi

$$\int_{V'} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dv' = \int_{V'} \rho \vec{f} dv' + \int_{V'} (\nabla \cdot \mathbf{T}) dv' \quad \rightarrow \text{integrale in volume}$$

$$\int_{V'} \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \mathbf{T} \right) dv' = 0$$

$$\Rightarrow \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}}$$

gravità + tensioni
↓ ↓
equazione di Cauchy

Sistema dell'equazioni di lubencio (3D):

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} & \text{q. moto} \rightarrow 6 \text{ incognite} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 & \text{massa} \rightarrow 3 \text{ incognite} \end{cases}$$

\Rightarrow legame costitutivo: Variazione velocità \rightarrow tensioni molecolari

$$\boxed{\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}}$$

tensione: pressione + deformazione ^{velocità di}

μ = viscosità dinamica, dipendente dal corpo fluido.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} & \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \vec{v}$$

BILANCIO DI NAVIER-STOKES

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + 2\mu \nabla^2 \vec{v} \end{cases}$$

Passaggio sistema mole \rightarrow fisso:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad \text{termine non-lineare!}$$

Notazione indiciale

$$\begin{cases} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONE GLOBALE EQUILIBRIO (idraulica)

$$\vec{G} + \vec{\pi} = \vec{m}_2 - \vec{m}_1 + \vec{I}$$

- $G =$ gravità
- $\pi =$ forze esterne superficiali
- $m_2 = m_1 =$ diff. quantità di moto
- $I =$ inerzie locali ($I=0$)

$$\vec{G} := \int_V \rho \vec{f} dV$$

$$\vec{\pi}_i := \int_A \phi_n dA$$

$$m_i := \int_{A_2} \rho v dQ - \int_{A_1} \rho v dQ$$

entrante e uscente

$$I := - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{r} dV \rightarrow \text{nulla per acqua}$$

\Rightarrow formula integrale $\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{r} dV}_M = \underbrace{\int_V \rho \vec{f} dV}_G + \underbrace{\int_A \vec{F} dS}_\pi$

$$\mathbb{T} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{t} = \mathbb{T} \cdot \hat{n}$$

Tensore degli sforzi esterni

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbb{T}) dV$$

simmetrico $\mathbb{T}^T = \mathbb{T}$

La tensione principale in un punto è il valore della tensione su una giacitura rispetto alla quale lo stato tensionale presenta solo componenti normali (direzioni principali).

$$\vec{t} = \mathbb{T} \hat{n} = \sigma_n \hat{n} \quad \rightarrow \text{problema autovalori } (\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I}) \hat{n} = \vec{0}$$

$$\det(\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0$$

[$I_i =$ invarianti]

Tensore principali

$$[\mathbb{T}] = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

$$\mathbb{T} = \bar{\sigma} \mathbb{I} + \mathbb{T}^{dev}$$

\Rightarrow parte sferica + parte deviatorica
 ↓
 stato idrostatico di tensione

$$\mathbb{T} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \bar{\sigma} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \bar{\sigma} \end{vmatrix}$$

Termine non-lineare di velocità $V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$
 quantità di moto

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \rho \left[\underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial t}}_{\text{velocità Tempo}} + \underbrace{V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k}}_{\text{deviazione velocità spazio}} \right]$$

LAGRANGIANO MATERIALE

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

EULERIANO LOCALE DEVIATORICO

FENOMENO DI TURBOLENZA

• MODELLO MEDIATO SULLA TURBOLENZA

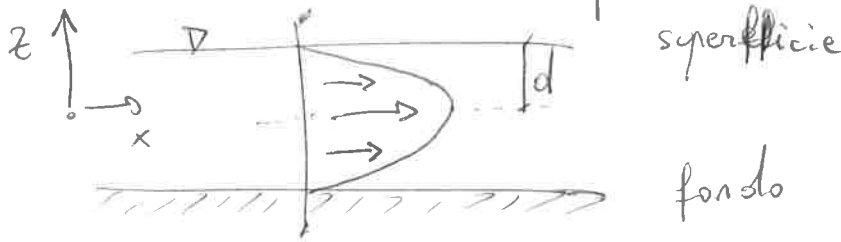
(Equazioni di Reynolds)
 velocità: segnale irregolare per deviazioni / oscillazioni

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + v'$$

eq. moto con velocità media $\rho \left[\frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} \right] = \rho f_i + \nabla \cdot \tau$

* v' : termine stocastico \rightarrow imprevedibilità del moto

Moto laminare con \vec{v} parabolica lungo \hat{z} .



$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \cdot \rho \quad \left[\frac{p}{\rho} = -\gamma \cdot x \right]$$

solo moto laminare

ipotesi del moto: superficie piane, moto stazionario, uniforme
 $\left(\frac{\partial}{\partial y} \text{ moto} = 0, \frac{\partial}{\partial t} \text{ moto} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \text{ moto} = 0 \right)$

↳ equazione moto $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$

↳ equazione continuità $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $w = \text{cost}$ $\Delta w = 0$ sulla parete

$\vec{v} = (u, 0, 0)$ carattere unidirezionale

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

3. Quindi $\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\nabla p}{\nabla x} = -\gamma \rho g = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

RELAZIONE VALIDA SOLO PER MOTO LAMINARE

integrazione: $\frac{du}{dz} = -\frac{\gamma \rho g}{\mu} \cdot z + C_1$ \rightarrow viscosità

condizione al contorno $z=0$ } max velocità $\frac{du}{dz} = 0$

Quindi $\frac{du}{dz} = 0 = C_1$ (per $z=0$)

integrazione: $u(z) = -\frac{\gamma \rho g}{\mu} z^2 + C_2$

condizione al contorno $z=d$ } min velocità $u(z) = 0$ parete e superficie

Quindi $u(d) = 0 = -\frac{\gamma \rho g}{\mu} d^2 + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{\gamma \rho g}{\mu} d^2$ (per $z=d$)

$\Rightarrow u(z) = -\frac{\gamma \rho g}{\mu} z^2 + \frac{\gamma \rho g}{\mu} d^2 = \frac{\gamma \rho g}{\mu} d^2 \left(1 - \left(\frac{z}{d}\right)^2 \right)$ PARABOLA PROFILO MOTO LAMINARE

Spessore dominio: $2d \rightarrow$ SCALA MACROSCOPICA

scala spaziale: $l_z = \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-1} \approx \left(\frac{1}{U_{max}} \frac{U_{max} - 0}{d} \right)^{-1} \approx d$

• Numero di Reynolds $Re = \frac{\bar{u} d}{\nu}$ oppure $Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu}$

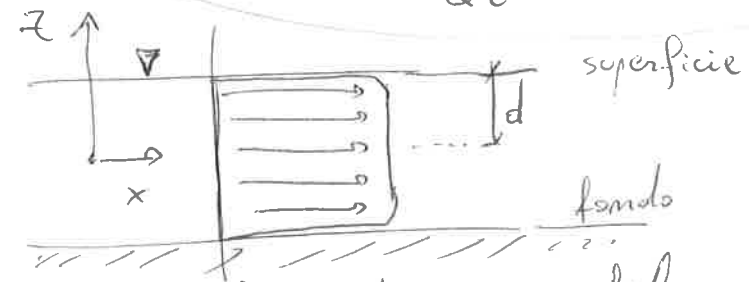
(dato $\mu = \rho \nu$)

\bar{u} = velocità media della parabola = $\frac{2}{3} U_{max}$

* Per $Re \rightarrow \infty$ (alta velocità) | MOTO TURBOLENTO |

$-\gamma \rho g = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ NON VALE!

"viscosità" diventa "vortice"



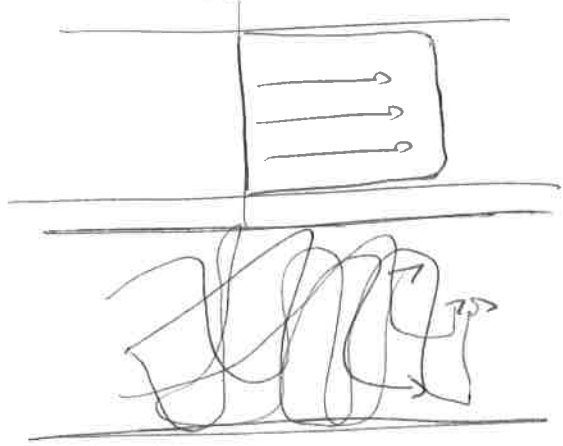
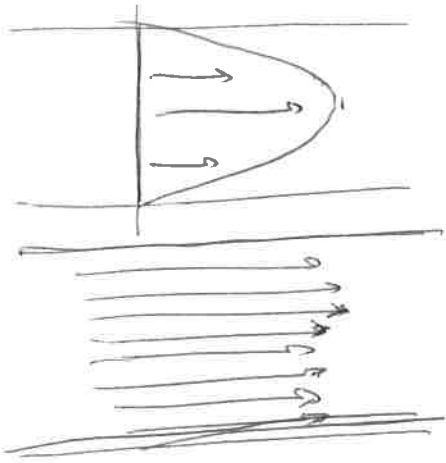
uniformità profilo

c.c. $\begin{cases} z=0 & u = \max \\ z=d & u = 0 \end{cases}$

\rightarrow SCALE MACRO e MICROSCOPICA

Processi vorticosi \rightarrow incremento processi di trasporto
 Quindi aumento della capacità diffusiva

velocità



moto
particelle

• ENERGIA: nel caso laminare l'energia va alle Tensioni viscosse convertendosi in calore -
 Nel caso turbolento l'energia è fornita dal sistema, assorbita dalle strutture vortico
se -

turb $\left\{ \begin{array}{l} L = \text{scala macro vortici (spessore)} \\ l = \text{scala micro vortici (dissipazione)} \end{array} \right.$

$$\frac{l}{L} \approx Re^{-3/4}$$

$\left\{ \begin{array}{l} Re \text{ alto: turbolenza} \rightarrow \text{scale } L \text{ vortici} \\ Re \text{ basso: laminare} \rightarrow \text{scale } l \text{ } \text{viscosità} \end{array} \right.$

\Rightarrow MOTO TURBOLENTO caotico ed imprevedibile, sen-
 simile alle piccole variazioni (effetto farfalla).

Matematica
della
velocità

\downarrow
 Analisi di
media e
correlazioni
(momenti
statistici)

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + v'$$

media
d'insieme $\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(v_x) \cdot v_x \cdot dv_x = f(x, t)$

Distribuzione statistica
della velocità

Statistiche per valori di più sezioni (x_1, x_2) con velocità V_x e V_y diverse, correlando i risultati:

VALORE ATTESO = $\langle V_x(\vec{x}_1, t_1) \cdot V_y(\vec{x}_2, t_2) \rangle$
(media)

$\neq \langle V_x(\vec{x}_1, t_1) \cdot V_y(\vec{x}_1 + \vec{r}, t_1 + \tau) \rangle$
 Δ spazio Δ tempo

Si definisce il RESIDUO \rightarrow distanza dalla media $v' = \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle$

$R_{ik} = \langle v'_i(\vec{x}, t) \cdot v'_k(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) \rangle$ tra più sezioni di misura (i, k)

per τ e $\vec{r} \rightarrow 0$ alta correlazione
per τ e $\vec{r} \rightarrow \infty$ bassa correlazione



$\parallel \Rightarrow$ Col passare del tempo la dipendenza delle prove scende

La "memoria breve" -

$P_{ik} = \frac{R_{ik}(\tau)}{R_{ik}(0)} // \frac{R_{ik}(\vec{r})}{R_{ik}(0)}$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $P_{ik} \in [0, 1]$

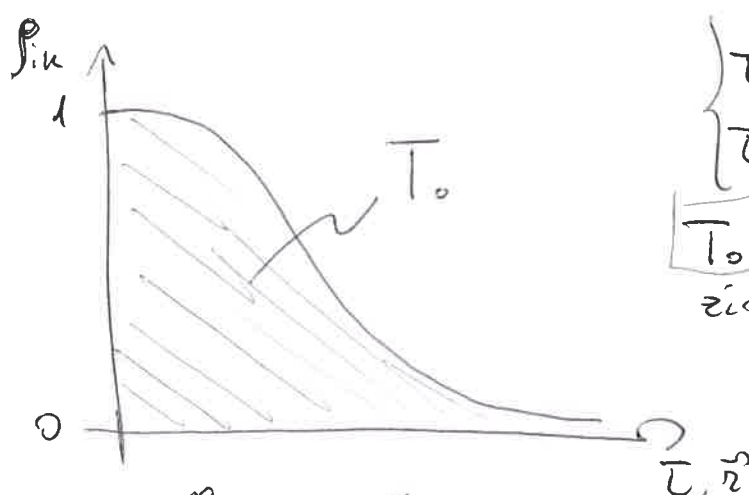
normalizzazione adimensionale

$P_{ik} = \frac{\langle v'_i(\vec{x}, t) \cdot v'_k(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) \rangle}{\langle v'_i(\vec{x}, t) \cdot v'_k(\vec{x}, t) \rangle}$

DISTINZIONE CASI

<ul style="list-style-type: none"> \rightarrow moto <u>mediamente stazionario</u> \rightarrow moto <u>mediamente uniforme</u> 	$(\tau = 0)$	stesso tempo, diverse sezioni
	$(\vec{r} = 0)$	stessa sezione, diverso tempo

\searrow moto medio $R_{ik} = f(\tau, \vec{r})$
completo e più realistico



$$\left. \begin{aligned} \tau, \vec{r} \rightarrow 0, \quad \rho_{ik} \rightarrow 1 \\ \tau, \vec{r} \rightarrow \infty, \quad \rho_{ik} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

T_0 area sottesa la curva di correlazione: scale integrale di correlazione

$$T_0 = \int_0^\infty \rho_{ik}(\tau) d\tau \quad \text{oppure} \quad = \int_0^\infty \rho_{ik}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Proprietà delle turbolenze dimensionalmente piccolo

Assunzione della velocità media come MEDIA TEMPORALE è definita da

$$\bar{v}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{v}_x$$

\Rightarrow variabile stazionaria ed aleatoria

* per un valore particolare d'istante t_0 , il valore $x(t_0, \theta)$ è variabile aleatoria dipendente da θ .
La densità $p_x(x(t_0))$ è in corrispondenza di t_0 .

MEDIA DI INSIEME: valore atteso di una funzione dei valori del segnale, eseguito rispetto alla variabilità dovuta a θ , di ordine n è $m_x^{(n)}(t_0) = E_\theta \{ x^n(t_0, \theta) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t_0, \theta) p_\theta(\theta) d\theta$

Fissato un valore di θ , si trova una MEDIA TEMPORALE identificando un membro $x(t, \theta_i)$ come segnale certo, θ_i calcolo di ordine n : $m_x^{(n)}(\theta_i) = \overline{x^n(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t, \theta_i) dt$

• VALORE MEDIO: $m_x(\theta_i) = \overline{x(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) dt$

• POTENZA 2: $m_x^{(2)}(\theta_i) = \overline{x^2(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta_i) dt$

\hookrightarrow una generica media temporale

non dipende dal tempo
è una variabile aleatoria (dipende da θ)

Differenza della natura di $\langle V_x \rangle$ e \bar{V}_x , ma il problema non sussiste per grandezza e memoria corta: si pone $(t, \vec{r}) \rightarrow \infty$ quindi $\bar{V}_x \rightarrow \langle V_x \rangle$

TEOREMA ERGODICO, condizioni di uso serie temporali e medie Temporeali.

condizioni: convergenza delle medie

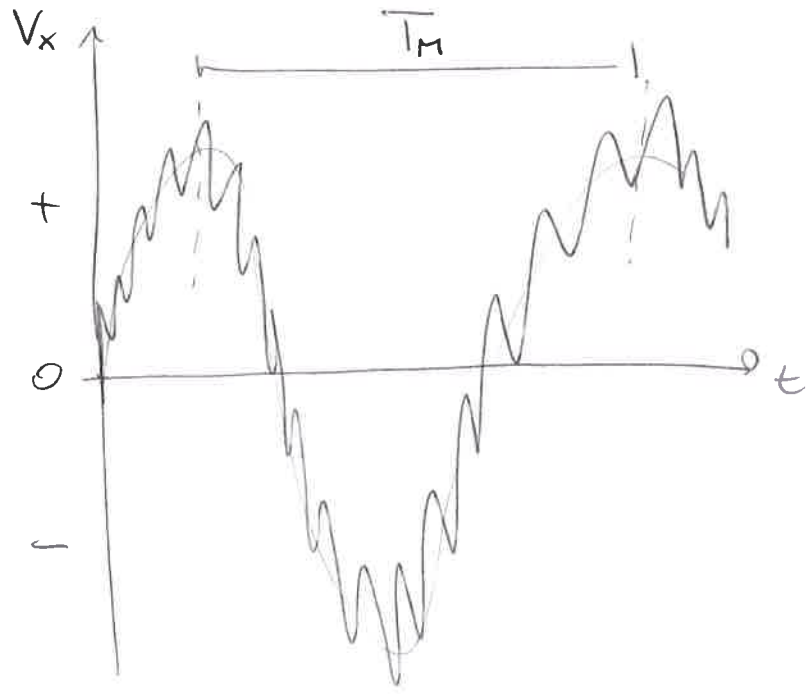
↳ memoria corta

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle (\bar{V}_x - \langle V_x \rangle)^2 \rangle = 0, \quad V_x \equiv \langle V_x \rangle$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_{xx} dt = 0$$

il teorema Ergodico elimina la stazionarietà del problema $T \rightarrow \infty$ quindi $T \gg T_0$!

con un fenomeno che si ripete nel tempo, si ha T_M PERIODO del fenomeno molto grande -



Analizzando un periodo

$$T_0 \ll T \ll T_M$$

condizione per cui si possono eliminare i disturbi: turbolenze

EQUAZIONI DI REYNOLDS

su velocità e pressioni

$$\vec{v} = \vec{V} + v', \quad \vec{p} = P + p'$$

PERMUTABILITÀ

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial x} \langle \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial x} \rangle \end{aligned} \right.$$

per cui $\langle ab \rangle = AB + \langle a'b' \rangle$

equaz. continuita'

$$\nabla \vec{V} = 0 \rightarrow \nabla(\vec{V} + v') = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{V} = 0 \text{ media} \\ \nabla v' = 0 \text{ fluttuazione} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \nabla \vec{V} + \nabla v' = 0$$

equaz. del moto

$$\rho \left[V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right] = \rho \left[V_k \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \left\langle v'_k \frac{\partial v'_{ki}}{\partial x_k} \right\rangle \right]$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} V_i + \rho \left[V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right] + \left\langle v'_k \frac{\partial v'_{ki}}{\partial x_k} \right\rangle - \rho f_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} V_i = 0$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} V_i + \rho \left[V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v'_i v'_k \rangle \right] - \rho f_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} V_i = 0$$

Termine non-lineare
da accelerazioni, inerzia \rightarrow stress particelle del fluido

INTRODUZIONE del fenomeno di TURBOLENZA

$$\mathbf{T}^{Turb} = -\rho \langle v'_i v'_k \rangle \quad \text{tensore simmetrico nello spazio di turbolenza}$$

Nell'equazione di Navier-Stokes: (con $\mu = \rho \nu$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} = -\rho \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + \mathbf{T}^{Turb} \end{array} \right. \rightarrow \text{legame meccanico in Boussinesq}$$

$$\mathbf{T}_{in}^{Turb} = A \mathbf{I} + 2\rho \nu^T \mathbf{D}$$

correzione en. cinetica Turb.

$$\rightarrow \mathbf{T} = -\rho \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + A \mathbf{I} + 2\rho \nu^T \mathbf{D}$$

$$\neq (A - \rho) \mathbf{I} + 2\rho (\nu + \nu^T) \mathbf{D}$$

Definire

- μ = coefficiente di viscosita' dinamica
- ν = coefficiente di viscosita' cinematica = $f(\text{fluido})$
- ν^T = coeff viscosita' cinematica turbolento = $f(\text{ambiente})$

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right] \quad \text{deformazione matrice (termini non-diagonali)}$$

Per ogni direzione spaziale si hanno D_{xx}, D_{xz}, D_{yz}
 quindi il tensore turbolento:

$$\mathbf{T}^{Turb} = 3A + 2\rho \mathbf{v}^T \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right]$$

dalle conservaz. di energia meccanica = simetrica + turbolenta
 $\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \text{divergenza } \nabla \cdot \vec{v} = 0$
 $\hookrightarrow |\vec{v}'|^2$

$$= \frac{1}{2} \rho \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle |\vec{v}'|^2 \rangle$$

quindi $-\rho \langle |\vec{v}'|^2 \rangle = -2e_c = 3A$ termine turbolento dell'energia
 $(A = -\frac{2}{3}e_c)$

In fine il sistema in Cauchy è

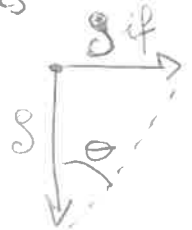
$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} = -(\rho - A)\mathbf{I} + 2\rho(\mathbf{v} + \mathbf{v}^T) \mathbf{D} \end{cases}$$

CASO TURBOLENZA DI PARETE

nel moto mediamente stazionario, uniforme e piano

approssimaz. $\begin{cases} \frac{\partial \text{moto}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \text{moto}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \text{moto}}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$(\vec{f} = -g \hat{z})$$



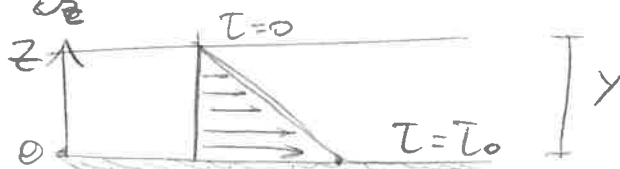
equazione del moto

$$-\rho g \hat{z} = \frac{d}{dz} \left[\mu \frac{dv_x}{dz} - \rho \langle v'_x v'_z \rangle \right]$$

Tensione Tangenziale τ

$$\frac{d\tau}{dz} = -\rho g$$

$$\hookrightarrow \tau = \int_0^y + \rho g \hat{z} dz = +\rho g \hat{z} (y-z) = \left[+\rho g \hat{z} y \left(1 - \frac{z}{y}\right) \right]$$



$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{y}\right)$$

Profilo della tensione lineare; massimo sulla parete e nullo in superficie (per cond. al contorno).

• LEGGE FONDAMENTALE DELLA TURBOLENZA

Ⓘ $V_x(z) = \frac{U_*}{k} \ln(z)$ sperimentale funzione logaritmica in altezza $\frac{1}{z}$

con $\begin{cases} k = \text{costante} \approx 0,41 \\ U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g \beta y} \end{cases}$

dipendenza da soli parametri macroscopici, per qualsiasi fluido

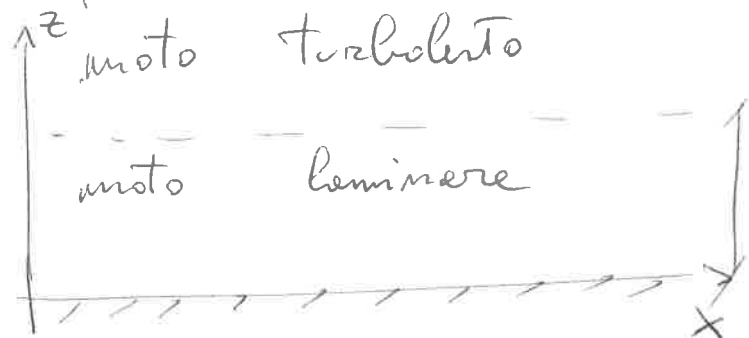
Ⓜ $v^T = k U_* z \left[1 - \frac{z}{y} \right]$

da $\frac{dV_x}{dz} = \frac{U_*}{kz} \Rightarrow \rho v^T \frac{U_*}{kz} = \rho U_*^2 \left[1 - \frac{z}{y} \right]$

$\rightarrow v^T = k U_* y \left[\frac{z}{y} \left(1 - \frac{z}{y} \right) \right]$ andamento della turbolenza lungo \hat{z} , massimo al centro e nullo agli estremi.

△ Nella I legge $V_x(z) = \frac{U_*}{z} \ln(z) + \text{cost}$
 sperimentalmente $\begin{cases} \text{parete liscia} & \frac{v}{U_*} \gg \epsilon & \text{cost} \rightarrow C_1 \\ \text{parete scabra} & \frac{v}{U_*} \ll \epsilon & \text{cost} \rightarrow C_2 \end{cases}$
 ($\frac{v}{U_*}$ = strato viscoso; ϵ = scabrezza U_* equivalente)

Ⓐ parete liscia $C_1 = \frac{v}{U_*}$



$\tau = \rho v^T \frac{dV_x}{dz}$

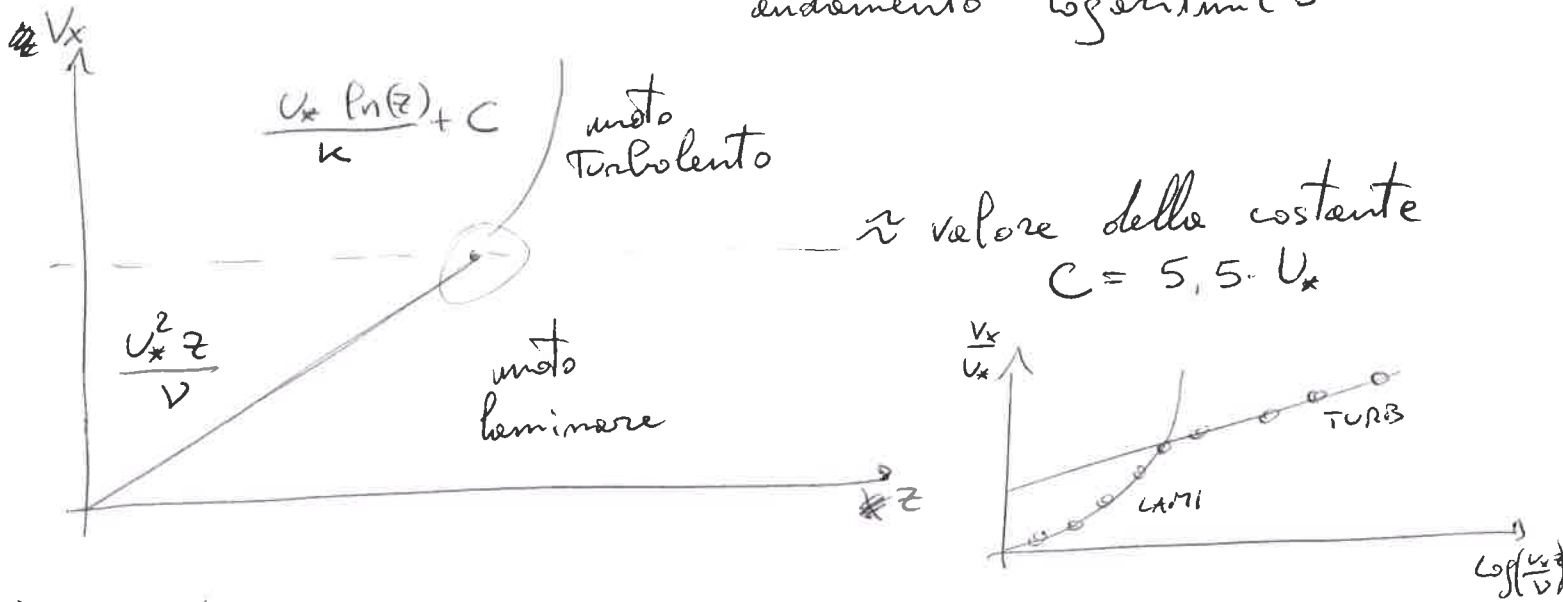
$\tau = \rho v \frac{dV_x}{dz}$

$\tau = \mu \frac{dV_x}{dz} = \tau_0 \left[1 - \frac{z}{y} \right] = \rho U_*^2$

$\Rightarrow V_x(z) = \frac{\rho U_*^2}{\mu} z + \text{cost} \rightarrow \frac{\rho U_*^2 z}{\mu}$

andamento lineare } moto laminare

7 Nella regione Turbolenta $V_x(z) = \frac{U_* \ln(z)}{\kappa} + \text{cost}$
 andamento logaritmico



B) parete scabra $C_2 = \epsilon$
 posto $z_0 =$ quota convenzionale di riferimento $< \epsilon$
 ipotesi di $z_0 \rightarrow \epsilon$,

$$V_x(z) = \frac{U_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\epsilon}\right) + 8,5$$

legge logaritmica sperimentale

\Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{parete liscia} \\ \text{parete scabra} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{V_x}{U_*} = f(\nu) \\ \frac{V_x}{U_*} = f(\epsilon) \end{array}$

Δ FUNZIONE DI SCIA: correzione errori sistematici

$$V_x(z) = \frac{U_*}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 1,84 z^2 + 1,56 z^3 \right]$$

$$u(x, y, z, t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(x, y, z, t_0) dt \right\}$$

media temporale delle componenti delle velocità

$$\hookrightarrow \bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

media delle fluttuazioni

velocità di riferimento

$$U_* = \sqrt{g \cdot Y}$$

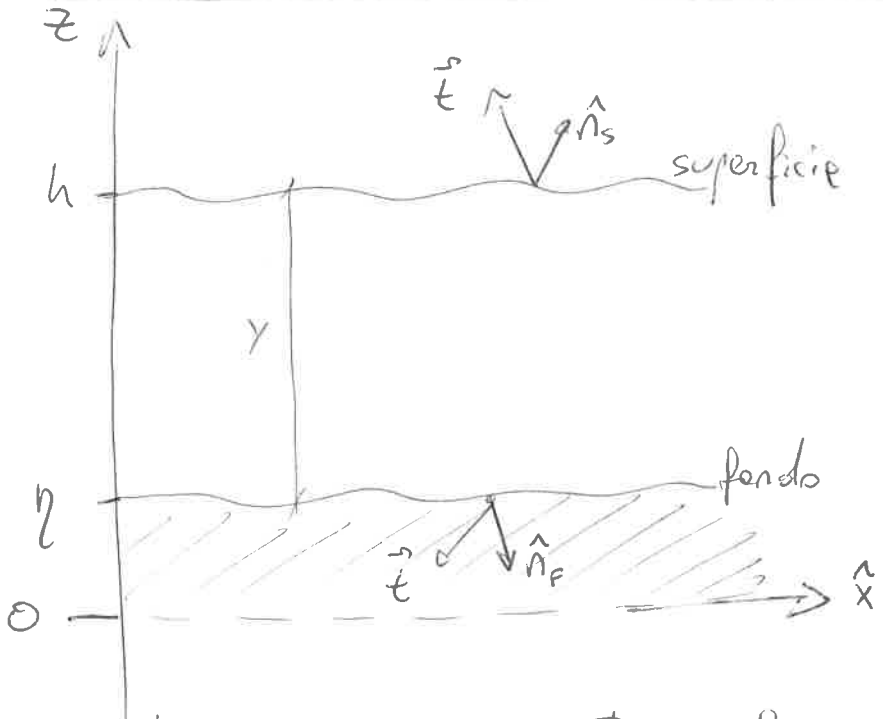
$$\frac{U_*^2}{Y} = g$$

accelerazione direzione \hat{x} della gravità

Lo in moto in curva Acc. Centrifuga $\left[\frac{U^2}{R} \right]$

CONDIZIONI AL CONTORNO

→ Dominio



$Y = h - \eta$ profondità
 $h(x, y, t), \eta(x, y, t)$
 $\Rightarrow Y = f(x, y, t)$
 Variabile in spazio e tempo

* Il sistema in spazio e tempo ha 6 gradi di libertà, quindi necessita di 6 condizioni al contorno.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] + \rho f_x + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] + \rho f_y + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \rho f_z + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] = 0 \end{cases}$$

I superficie libera $z = h(x, y, t)$

A. cond. cinematica $\frac{dF_s}{dt} = 0$ $\vec{F}_s = (-h, -h, 1)$

quindi $\frac{\partial F_s}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_s}{\partial x} + v_y \frac{\partial F_s}{\partial y} + v_z \frac{\partial F_s}{\partial z} = 0$
 $-\frac{\partial h}{\partial t} - v_x \frac{\partial h}{\partial x} - v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_z = 0$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = 0 \right]$

B. cond. dinamica normale

$(\mathbb{T} \cdot \hat{n}_s) \cdot \hat{n}_s = \text{pressione esterna}$

8 c. cond. ~~dinamica~~ tangenziale

$$\begin{cases} (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{F}_1 \\ (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) \hat{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{F}_2 \end{cases}$$

II) fondo $z = \eta(x, y, t)$

A. cond. ~~dinamica~~ cinematica $\frac{dF_F}{dt} = 0$ $F_F = (\eta, \eta, -1)$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z = 0 \right]$$

B. cond. dinamica (solo tangenziale)

$$\begin{cases} \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = V_{1F} = 0 \\ \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 = V_{2F} = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow 7 condizioni al contorno definite in h e η variabili -

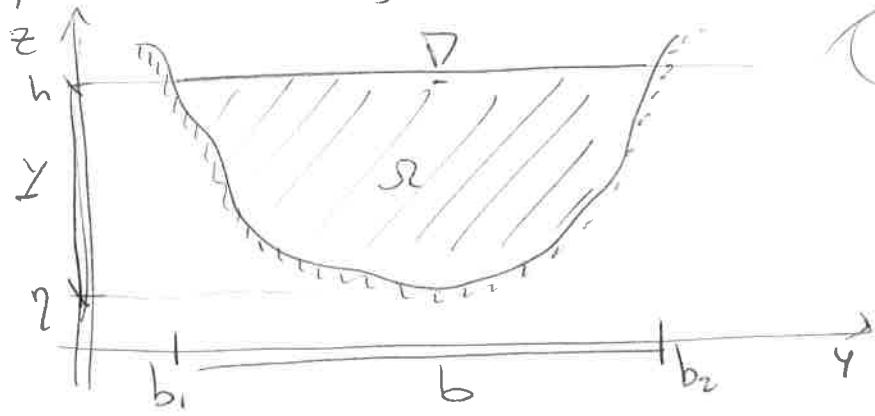
Per ipotesi di FONDO FISSO, η è costante e noto,
quindi: 7 equazioni in 7 incognite - [7 gdl]

equazioni $\left\{ \begin{array}{l} \text{bilancio di massa} \\ \text{bilancio di quantità di moto} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condizioni} \\ \text{al} \\ \text{contorno} \end{array} \right\} \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = 0 \\ (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \text{press. esterna} \\ (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{F}_1 \\ (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) \hat{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{F}_2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z = 0 \rightarrow v_z = 0 \\ \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = 0 \\ \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = h(x, y, t) \\ z = \eta \end{array}$$

MODELLI ACQUA BASSA

Ipotesi di lunghezza molto maggiore della profondità



$$b \gg \gamma$$

gerarchia delle scale geometriche

Definendo le grandezze

$$\begin{cases} (x, y) \rightarrow L_0 \\ (z) \rightarrow \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_0 \gg \gamma$$

$$\delta = \frac{\gamma}{L_0} \ll 1 \quad \text{rapporto scale}$$

la variazione lungo le coordinate

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \ll \frac{\partial}{\partial z}$$

→ approssimazione dei termini derivati

$\vec{v} = (u, v, w)$ vettore velocità

• Continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} (u, v) \rightarrow U_0 \\ (w) \rightarrow W_0 \end{cases}$$

$$\frac{U_0}{L_0} + \frac{W_0}{\gamma} = 0$$

se $W_0 = -\left(\frac{\gamma}{L_0}\right) U_0 \rightarrow W_0 \ll U_0$

cioè la velocità lungo \hat{z} è molto piccola rispetto alla velocità in \hat{x} e \hat{y} . → PLANIMETRIA

• Conservazione del moto in \hat{z} :

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w'w' \rangle}{\partial z}$$

$$= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Termine dominante

$$\rho \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} \right] = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\rightarrow u \frac{\partial w}{\partial x} \sim \delta \frac{U_0^2}{L_0} \ll g$$

$$\rightarrow \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} \sim u_* \frac{U_0}{L_0} \ll g$$

$$\left\{ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \right.$$

Condizioni di acqua bassa:

I $\frac{\rho U_0^2}{\rho g L_0} \ll 1 \rightarrow \boxed{\rho^2 Fr_0^2 \ll 1}$

num. di Froude costante e piccolo

II $\frac{U_*}{g L_0} \ll 1 \rightarrow \boxed{\rho Fr_0^2 \frac{U_*}{U_0} \ll 1}$

velocità U_* molto piccola

($w = \text{cost}$)

l'equazione statica diventa

$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \boxed{P = \rho g (h - z)}$

PRESSIONE IDROSTATICA

In direzione \hat{x} e \hat{y} sul piano

$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right.$ variazioni di quota, pendenze della superficie libera

motore del moto

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'u' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'u' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle w'v' \rangle + \rho g \frac{\partial h}{\partial y} = 0$

accelerazione

Turbolenza

< 0
discesa

$P = \rho g (h - z)$

MODELLO 3D

SU ACQUA BASSA

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

1: per il legame reologico $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e $-\nu' \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]$

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\nu' \frac{\partial u}{\partial z}) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\nu' \frac{\partial v}{\partial z}) + \rho g \frac{\partial h}{\partial y} = 0$

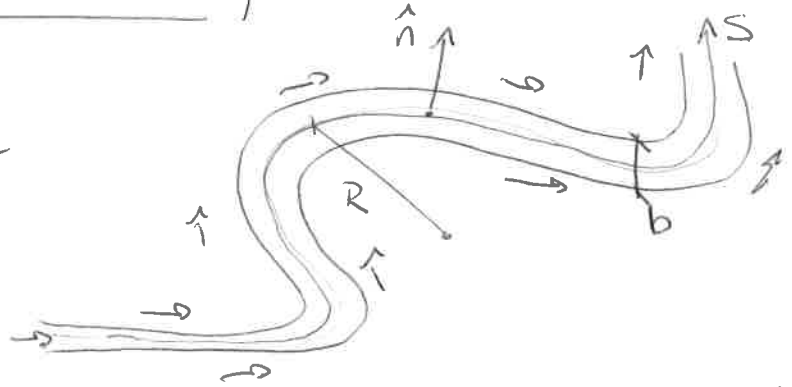
2: carico piezometrico costante in \hat{z}

$h = z + \frac{P}{\rho g} = \text{costante}$

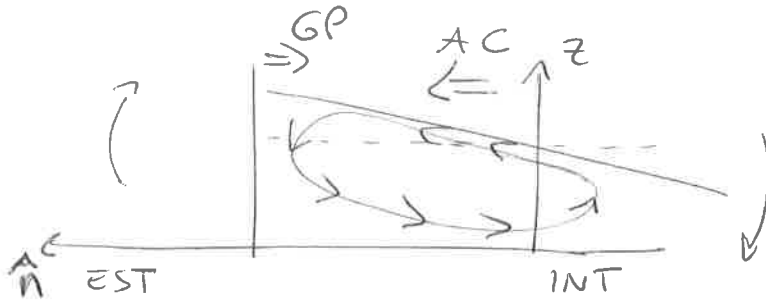
Δ.3: Il modello è definito sul piano (x, y) ma con pendenze del fondo.
 ⇒ Variazioni molto lievi!

MOTO IN CURVA

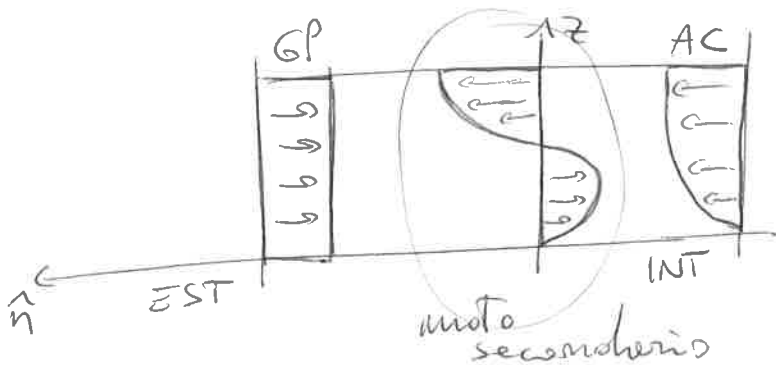
Analisi planimetrica di un corso d'acqua
 ⇒ formazione di meandri



In curva si genera una FORZA CENTRIFUGA verso l'esterno ed un'inclinazione verso l'interno per GRADIENTE DI PRESSIONE.



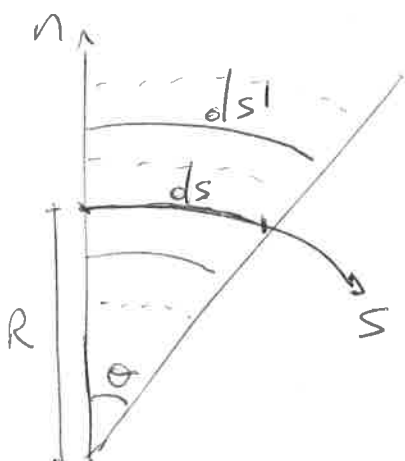
$$\left\{ \begin{array}{l} GP: \int \frac{\partial h}{\partial n} \\ AC: \frac{U^2}{R} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{accelerazioni} \\ \text{generano un moto secondario} \end{array}$$



$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

velocità

COORDINATE CURVILINEE



$$\frac{ds'}{ds} > 1 \rightarrow h_s = \frac{ds'}{ds} \text{ coeff metrico}$$

$$\frac{(R+n)\theta}{R\theta} = \frac{R+n}{R} = 1 + \frac{n}{R}$$

per $\begin{cases} h_s > 1 & \text{esterno} \\ h_s = 1 & \text{sull'asse} \\ h_s < 1 & \text{interno} \end{cases}$

Nelle equazioni del moto si sostituisce la coordinata spaziale $\hat{x} \rightarrow s$ curvilineo.
 $\hat{y} \rightarrow n$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{h_s} u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{R+n} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{h_s} g \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{h_s} u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v^2}{R+n} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial n} g \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (*)$$

accelerazione longitudinale (\hat{s}) in avanti
 accelerazione trasversale (\hat{n}) verso l'interno

+ ipotesi di ~~Rozovskiy~~ Rozovskiy:

1. stazionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
2. sviluppato $\frac{\partial}{\partial s} = 0, \frac{\partial h}{\partial s} = -i$
3. acque basse
4. piccola curvatura $\frac{y}{R} \ll 1$

equazioni approssimate per ipotesi

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{h_s} g i = 0 & \text{lungo } \hat{s} \\ -\frac{v^2}{R} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{h_s} g i = 0 & \text{lungo } \hat{n} \quad (*) \end{cases}$$

PRINCIPIO DI CAUSA-EFFETTO (*) in direzione trasversale al moto

$$\frac{v^2}{R} = g \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

termini: accelera. centrifuga inclinaz. superficie moto secondario

$v_0 \approx \left(\frac{y_0}{R} \frac{u_0}{u_*} \right) u_0$
 rapporto piccolo \approx conduttanza di Chezy } non si può trascurare l'effetto

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad \text{e} \quad v^T = k u_* z \left(1 - \frac{z}{y} \right)$$

+ condizioni al contorno $\left\{ \begin{array}{l} \text{in } z = z_0 \rightarrow v = 0 \\ \text{in } z = y \rightarrow v^T \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$

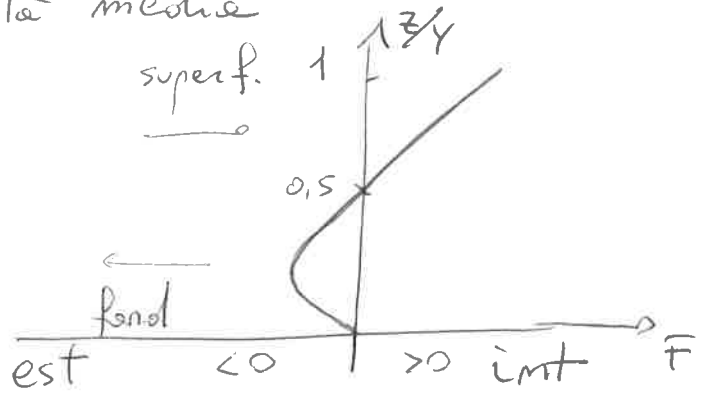
com $U_0 = \frac{1}{Y} \int_Y U dz$

l'andamento delle velocità è dimensionale

$$V = \frac{Y}{R} U_0 F\left(\frac{z}{Y}\right)$$

velocità medie

superf.



Quindi la tensione sul fondo

$$\tau_n = -\tau_s \left(\frac{Y}{R}\right) f_1\left(\frac{D_s}{Y}\right) \approx -10 \frac{Y}{R} \tau_s$$

piccola rispetto alla superficie

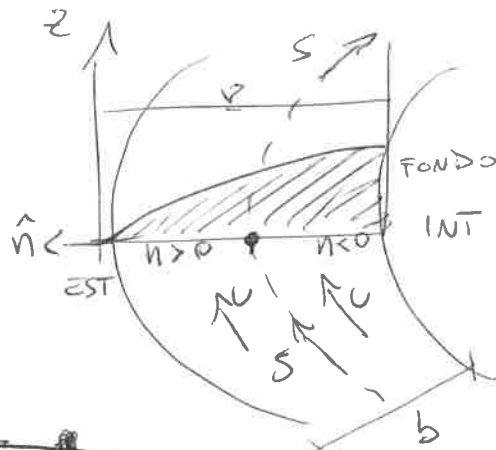
↳ Causa di EROSIONE e DEPOSITO, quindi fondale **VARIABILE!**

il moto secondario erode il suolo all'esterno, trasportando all'interno

Velocità longitudinale (U)

$$\frac{1}{h_s} \rho \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu^T \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

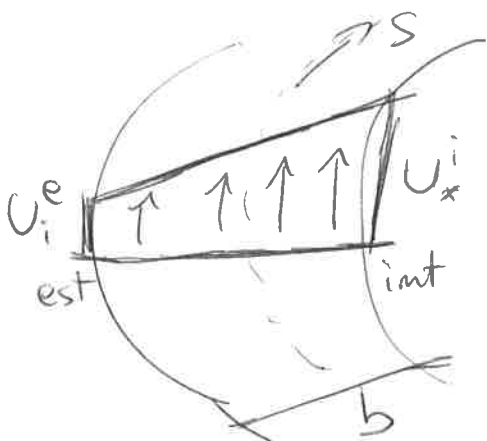
$$\left(h_s = \frac{R+n}{R}, \frac{\partial h}{\partial s} = -if \right)$$



$$U_* = \sqrt{\frac{g if Y}{1 + \frac{n}{R}}} \approx U = \sqrt{g if Y} \text{ if velocità approssimata}$$

com $\frac{if \neq 1}{if(1 + \frac{n}{R})} \rightarrow 1$

$$\begin{cases} \text{interno } n = -\frac{b}{2}, & U_*^i = \sqrt{\frac{g if Y}{1 - \frac{b}{2R}}} \\ \text{esterno } n = \frac{b}{2}, & U_*^e = \sqrt{\frac{g if Y}{1 + \frac{b}{2R}}} \end{cases} \Rightarrow U_*^e < U_*^i$$

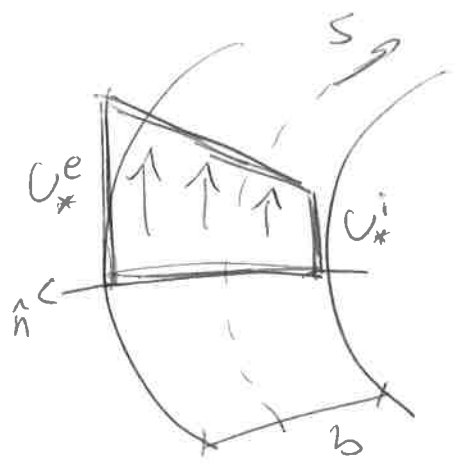


Il fenomeno del moto secondario provoca aumento delle velocità interne rispetto all'esterno

In condizioni rettilinee $U = f(y) = \sqrt{gy}$ if
 quindi maggiore è la profondità e maggiore è la
~~pendenza~~ velocità.

⇒ Fondo modellato: maggiore profondità all'esterno.

$$U_*^e > U_*^i$$



Per sovrapposizione degli
 effetti, si pone velocità unifor=
 me nella larghezza dell'alveo,
 considerando il corso rettilineo
 uniforme.

MODELLO 2D MEDIATO SULLA VERTICALE

→ Simile all'approssimazione di acqua bassa

$$\frac{\partial}{\partial z} \gg \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

~~h~~ $y = h - z$ affondamento
 (profondità)

$$\begin{cases} \hat{N}_s = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}; -\frac{\partial h}{\partial y}; +1 \right) \\ \hat{N}_f = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; -1 \right) \end{cases}$$

Tensori su
 superficie e
 sul fondo

Applicabile lontano dalle sponde e con variazioni
 trascurabili.

vel. longitudinale $\bar{U} = \frac{1}{Y} \int_0^h u dz$
 vel. trasversale $\bar{V} = \frac{1}{Y} \int_0^h v dz$

} variabili (x, y, t)

* ~~Leibniz~~ Leibniz → permutabilità *

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x, y) dz = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F}{\partial x} dz + \frac{\partial B}{\partial x} F \Big|_B - \frac{\partial A}{\partial x} F \Big|_A$$

• equaz. di continuità

$$3D: \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

condizioni cinematiche

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - wh = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w\eta = 0 \end{cases}$$

↳ approssimazione verticale per integrazione in dz

$$\int_z^h \frac{\partial}{\partial x} u dz - \frac{\partial h}{\partial x} u|_h + \frac{\partial \eta}{\partial x} u|_\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h v dz - \frac{\partial h}{\partial y} v|_h + \frac{\partial \eta}{\partial y} v|_\eta + w|_h - w|_\eta = 0$$

$$\int_z^h \frac{\partial u}{\partial x} dz \quad \int_z^h \frac{\partial v}{\partial y} dz \quad \int_z^h \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = w|_h - \frac{\partial h}{\partial x} u|_h - \frac{\partial h}{\partial y} v|_h \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = w|_\eta - \frac{\partial \eta}{\partial x} u|_\eta - \frac{\partial \eta}{\partial y} v|_\eta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h v dz + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

↳ $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$

$$\leadsto \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \gamma) = 0$$

FORMA MEDIATA DELLA CONTINUITÀ
 $(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0)$

• equaz. della quantità di moto

$$3D: \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

condizioni cinematiche

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - wh = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w\eta = 0 \end{cases}$$

↳ approssimazione verticale per integrazione in dz

$$\int_\eta^h \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial x} \right] dz = 0$$

$$\int_\eta^h \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial y} \right] dz = 0$$

Tenendo conto

$$\begin{cases} u(z) = \bar{u} + u'(z) \\ v(z) = \bar{v} + v'(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^h u^2 dz = \bar{u}^2 L \quad \text{e} \quad \int_0^h v^2 dz = \bar{v}^2 L \quad \text{approssimazioni di velocità}$$

termine gravitazionale $\int_0^h g \frac{\partial h}{\partial x} dz = g \frac{\partial h}{\partial x} L$

termine non-lineare $\int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \langle uv' \rangle dz = \frac{1}{\rho} \left[\tau_{xz}|_0 - \tau_{xz}|_h \right]$
 $= - \frac{1}{\rho} \left[\tau_{fx} + \tau_{sx} \right]$

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho Y} \left[\tau_{fx} + \tau_{sx} \right]$	FORMA MEDIATA DEL MOTO (in \hat{x} e \hat{y})
$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho Y} \left[\tau_{fy} + \tau_{sy} \right]$	

accelerazione gravità Tensioni

determinazione con condizioni dinamiche delle Tensioni

$$\tau_{sx} = \tau_{sy} = 0$$

$$\tau_{fx} = \tau_{fy} = \text{LEGAME COSTITUTIVO} \quad \left. \begin{matrix} \text{effetto} \\ \text{dell'attrito} \end{matrix} \right\} \text{al fondo}$$

Sperimentalmente

$$\tau = -\rho \frac{|\vec{v}|^2}{C^2}$$

quindi in direzione opposta a $\vec{v} = (\bar{u}, \bar{v})$

$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} y) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} y) = 0$	Sistema modello 2D mediato in dz
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho Y} \left[\tau_{fx} + \tau_{sx} \right]$	
$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho Y} \left[\tau_{fy} + \tau_{sy} \right]$	
$\vec{\tau} = -\rho \frac{ \vec{v} ^2}{C^2}$	

Confronto MODELLO ACQUA BASSA e 2D in dz

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'u' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'u' \rangle + \frac{\partial}{\partial w} \langle u'w' \rangle + \rho \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial w} \langle v'w' \rangle + \rho \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ P = \rho g (h - z) &\text{ pressione idrostatica} \\ \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \bar{y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{y}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\rho \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho y} [\tau_{xf} + \tau_{xs}] \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\rho \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho y} [\tau_{yf} + \tau_{ys}] \\ \vec{\tau}_f &= -\rho \frac{|\vec{v}|^2}{G^2} \text{ legge costitutivo} \end{aligned} \right.$$

MODELLO 1D e FORMA DSV in dz o dy

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} + \rho \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [\tau_s b - \tau_f B] &= 0 \\ \tau_f &= -\rho \frac{U^2}{G^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\rho \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_f}{\rho R_h} \text{ moto + continuita} \\ \tau_f &= -\rho \frac{U^2}{G^2} \end{aligned} \right.$$

MODELLO 3D di partenza

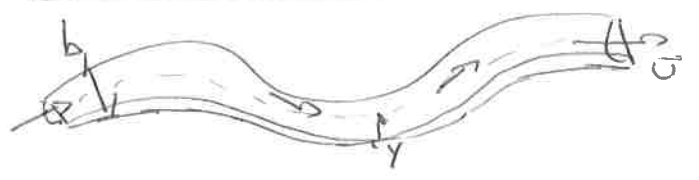
$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \vec{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} &= -(p - A) \mathbf{I} + 2\mu (\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{D} \end{aligned} \right.$$

MODELLO 1D DI CORRENTE

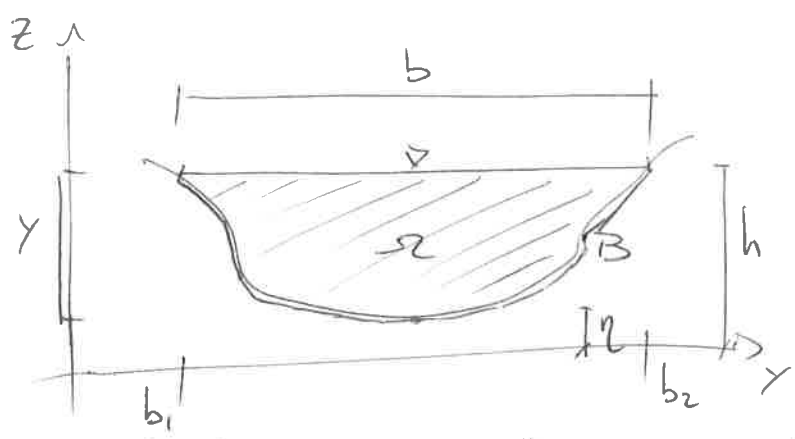
mediato in profondità e larghezza, lungo l'asse \hat{x} .

$\frac{\partial \rho}{\partial x} \ll \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ quindi $L_0 \gg (\lambda, b_0)$

$u \gg (v, w)$ velocità longitudinale dominante
 L_0



ipotesi di sezione costante $h = \text{cost}(z, y)$
 per superficie libera fissata $\rightarrow y = h - \eta$.



Nota il fondo η , è incognita la superficie libera h , quindi Ω e Ω' .
 $[\Omega = b \cdot \gamma = (b_2 - b_1) \cdot (h - \eta)]$

La velocità media $\bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u \, d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{b_1}^{b_2} \int_{\eta}^h u \, dz \, dy$

$\int_{\eta}^h \bar{u} \, dz = \bar{u} \gamma$ quindi $\bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int_{b_1}^{b_2} \bar{u} \gamma \, dy = f(x, t)$

\rightarrow PORTATA $Q = \bar{u} \Omega = \int_{b_1}^{b_2} \bar{u} \gamma \, dy$

versori $\hat{n}_s = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, +1 \right) \approx \hat{z} + 1$
 tensione $\hat{n}_f = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, -1 \right) \approx \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2}}$

equazione CONTINUITA'

2D: $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} \gamma)}{\partial y} = 0$

integrazione in larghezza

$\int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \gamma)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} \gamma)}{\partial y} \right) dy = 0$

con condizione: $b_1 \rightarrow y=0, b_2 \rightarrow y=b$ alle sponde

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{b_1}^{b_2} \gamma dy \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{b_1}^{b_2} \bar{U} \gamma dy \right] + \left[\frac{\partial b_1}{\partial t} \gamma \Big|_{b_1} - \frac{\partial b_2}{\partial t} \gamma \Big|_{b_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x} \bar{U} \gamma \Big|_{b_1} - \frac{\partial b_2}{\partial x} \bar{U} \gamma \Big|_{b_2} + \bar{V} \gamma \Big|_{b_2} - \bar{V} \gamma \Big|_{b_1} \right] = 0$$

sezione in dt portata in dx

termini alle spande = 0

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$$

Compensazione tra variazioni di sezione nel tempo e variazioni di portata lungo il corso.

• Equazioni QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho \gamma} [T_{xs} + T_{xF}] = 0 \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho \gamma} [T_{ys} + T_{yF}] = 0 \end{cases}$$

integrazione in larghezza (col termine γ)

$$\int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial(\bar{U}\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}^2\gamma)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{U}\bar{V}\gamma)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [T_{x|s} - T_{x|F}] \right) dy = 0$$

portata in dt velocità in dx $v \ll c$ gravità Tensioni

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{\rho} [T_{x|s} - T_{x|F}] dy = 0$$

$$* \int_{b_1}^{b_2} T_{x|F} dy = \int_{b_1}^{b_2} \frac{T_{xF}}{\cos \alpha} dy = \int_B T_{Fx} dB = T_F B$$

$$* \int_{b_1}^{b_2} T_{x|s} dy = \int_{b_1}^{b_2} T_{xs} dy = \int_b T_{xs} db = T_s b$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [T_s b - T_F B] = 0$$

condizioni delle Tensioni

$$\begin{cases} T_s = 0 \\ T_F = -\rho \frac{U^2}{G^2} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial(\bar{U} \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{T_F B}{\rho} = 0$$

Per una geometria regolare \rightarrow modello nella forma di De Saint Venant.

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u}{\partial t} + u \Omega \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (u \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_f B}{\rho} = 0$$

Per la continuità: $u \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (u \Omega)}{\partial x} = 0$

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + u \Omega \frac{\partial u}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_f B}{\rho} = 0 \quad \rightarrow \text{sull'unità della sezione } \Omega$$

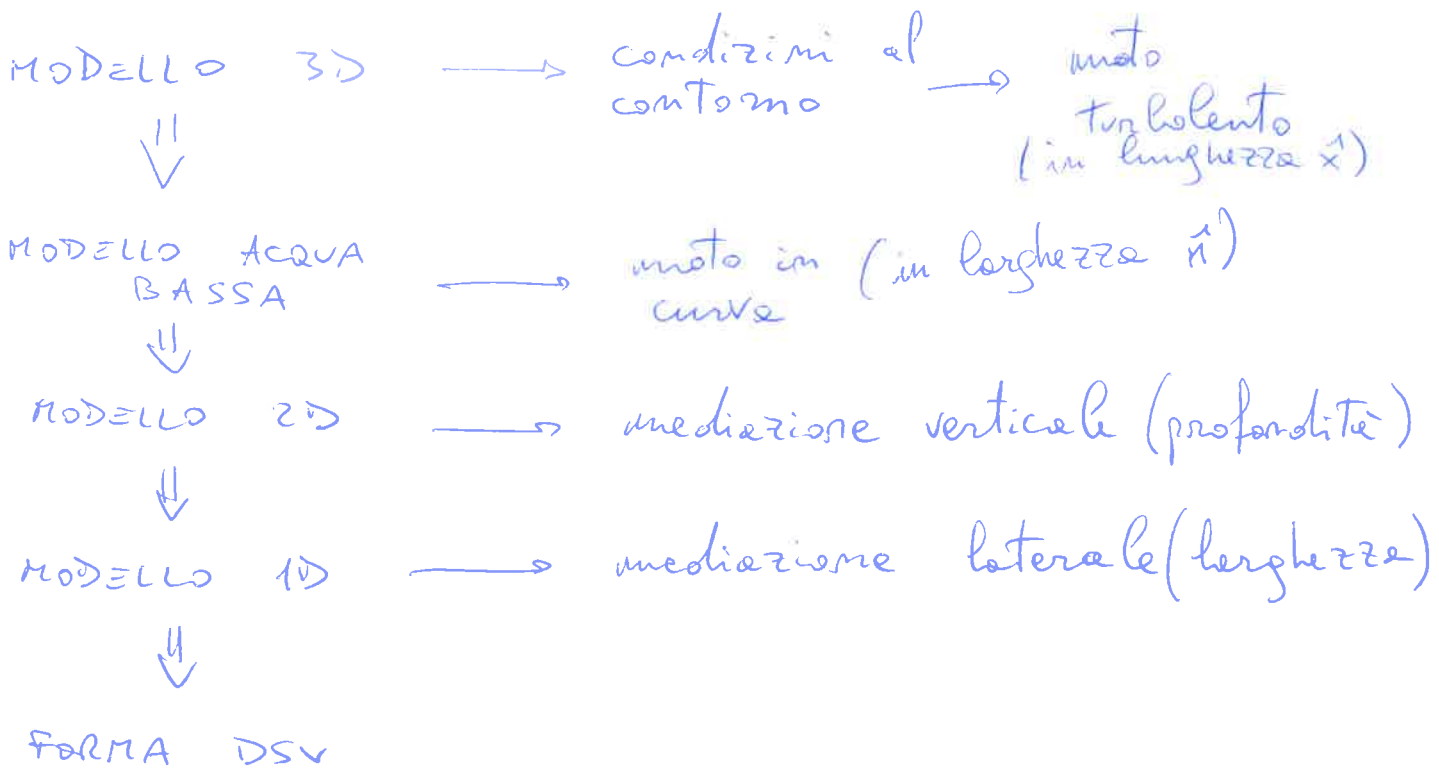
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_f B}{\rho \Omega} = 0 \quad \left(\text{con } \frac{B}{\Omega} = \frac{1}{R_h} \right)$$

accelerazione
grav.
Tensione

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_f}{\rho R_h}$$

FORMA DI DSV del modello 1D

\rightarrow se aumenta la pendenza, aumenta la velocità, quindi aumentano le tensioni al fondo.



EQUAZIONI
del BILANCIO

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 & \text{massa} \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{T} & \text{q. moto} \end{cases} \quad \left(\vec{f} = -g \hat{z} \right)$$

NON-linearità

\Rightarrow VISCOSITÀ

TURBOLENZA (vorticità)

↓
sistemi di
Cauchy

fenomeno trascurabile perché ha
Cassa memoria a lungo termine

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{T} \\ \vec{T} = -\left(\rho + \frac{2}{3}\epsilon c\right) \mathbf{I} + 2\rho(\nu + \nu^T) \mathbf{D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{turb. } V_x(z) = \frac{U_*}{k} \ln(z) \\ \text{velocità} \\ \text{lam. } V_x(z) = \frac{\rho U_*^2 z}{\mu} \end{cases}$$

Condizioni al contorno $f(h)$:

$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v - w = 0$	cinematica	} superficie $z=h$
$(\vec{T} \cdot \hat{n}_s) \cdot \hat{n}_s = \text{press. ext.}$		
$(\vec{T} \cdot \hat{n}_s) \hat{e}_1 = F_1$	} dinamiche	
$(\vec{T} \cdot \hat{n}_s) \hat{e}_2 = F_2$		
$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v - w = 0$	cinematica	
$\vec{v} \cdot \hat{e}_1 = 0$		} dinamiche
$\vec{v} \cdot \hat{e}_2 = 0$		

APPROX 1: ACQUA BASSA 3D

ipotesi: $L_0 \gg \lambda$; $\frac{\partial}{\partial z} \gg \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ p = \rho g (h-z) \quad \text{idrostatica} \end{cases}$$

deviazione \rightarrow turbolenza

$$\leadsto \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu^T \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

→ in 3D acqua bassa
 Moto in curva → moto secondario
 effetto dell'accelerazione centrifuga $\frac{v^2}{R}$ e delle forze di gravità (inclinazione superficie) $g \frac{\partial h}{\partial n}$

$$v \cdot \frac{v^2}{R} = g \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial z} \left(v^T \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

v. esterno v. interno velocità risultante

⇒ differenza di velocità INT e EST
 ↳ effetto erosione fondo: erosione (EST), deposito (INT)
 ⇒ v maggiore in profondità maggiore $\therefore \Rightarrow \underline{v_{est}}$

↳ velocità longitudinale

$$\begin{cases} v_E = \sqrt{gY \frac{if}{1 + \frac{b}{nR}}} \\ v_i = \sqrt{gY \frac{if}{1 - \frac{b}{nR}}} \end{cases} \quad \underline{v_E < v_i}$$

⇒ Somma effetti:
 il moto in curva si approssima al moto rettilineo

APPROX 2: MODELLO 2D

ipotesi: mediate sulle profondità

velocità medie su piano

$$\begin{cases} \bar{u} = \int_y u \, dz \\ \bar{v} = \int_y v \, dz \end{cases} \quad (y = h - \eta)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\eta)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho Y} \left[\bar{\tau}_{xf} + \bar{\tau}_{xs} \right] = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho Y} \left[\bar{\tau}_{yf} + \bar{\tau}_{ys} \right] = 0 \end{cases}$$

Tensioni per turbolenza

→ $\bar{\tau}_f = -\rho \frac{\bar{v}^2}{C^2}$ legge di chiusura

APPROX 3: MODELLO 1D | mo di corrente

ipotesi: $l_0 \gg (\lambda_0, b_0)$, $\frac{\partial}{\partial x} \ll (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z})$

velocità longitudinale $v = \frac{1}{\rho} \int_B \bar{u} \rho \, dy$ [con $\rho = \rho(B(y))$]

• mediazione sulla lunghezza.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 \rho)}{\partial x} + \rho \kappa \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [\tau_s b - \tau_F B] = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \tau_F = -\rho \frac{v^2}{C^2}$

moltiplicando per la sezione ρ

\rightarrow DSV 1D e sezione fissa ($\rho = \rho(B)$)

$$\frac{dv}{dt} + \rho \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_F}{\rho R_i} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 \rho)}{\partial x}$$

termine velocità

CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

FORMA REALE della sezione



SEZIONE RETTANGOLARE EQUIVALENTE ($\Omega = b \cdot \gamma_m$)

Conserva b e Ω , con $\gamma \rightarrow \gamma_m$

valore della velocità univoco

$$V = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u d\Omega = \frac{Q}{\Omega} \text{ in tutta la corrente}$$

VARIABILI PRINCIPALI: Q, h

VARIABILI ENERGETICHE: H, E, S

• **CARICO TOTALE** energia meccanica totale della corrente per unità di peso. Bernoulli: $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$

$$\text{Potenza meccanica} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho g z d\Omega}_{\text{energia potenziale}} + \underbrace{\int_{\Omega} p d\Omega}_{\text{pressione}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} u^2 d\Omega}_{\text{energia cinetica}}$$

$$H \Rightarrow h + \alpha \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}$$

quota piezometrica e altezza cinetica

l'attrito consuma energia H .

alloca energia in uno dei due termini

le corrente ha un grado di libertà

• **ENERGIA SPECIFICA** energia rispetto ad un riferimento che cambia da sezione a sezione - $E = H - z_f$

$$E = \underbrace{h - z_f}_y + \frac{\alpha V^2}{2g} = y + \frac{\alpha Q^2}{2g \Omega^2}$$

l'energia specifica è rimmovibile, le variazioni determinano il comportamento fisico della corrente.

• **SPINTA** azione dinamica che la corrente ha sulla parete. $S = \int_{\Omega} \rho u^2 d\Omega + \int_{\Omega} p d\Omega = \rho \beta V^2 \Omega + p_0 \Omega$

Azione dinamica distribuita in una funzione dinamica ed una funzione statica.

Nel MOTO UNIFORME si hanno caratteristiche costanti in spazio e Tempo. Ipotesi: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} = 0$, $Q = \text{cost}$

Quindi $\left\{ \begin{array}{l} E \neq f(x) \\ U \neq f(x) \\ S \neq f(x) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \neq f(x) \\ Y \neq f(x) \end{array} \right.$

Ma $\left\{ \begin{array}{l} H = f(x) \\ h = f(x) \\ z_f = f(x) \end{array} \right. \rightarrow \text{costanti ed uguali}$

\Rightarrow MOTO DELLE CORRENTI \rightsquigarrow EQUAZIONI

Modello 1D $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{eq. massa} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 \Omega)}{\partial x} + \rho \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0 B}{\rho} = 0 \quad \text{eq. q. moto} \end{array} \right.$

* Si definisce la legge reologica di chiusura per determinare il sistema nei termini di Q e h , confrontando le grandezze di gravità e attrito.

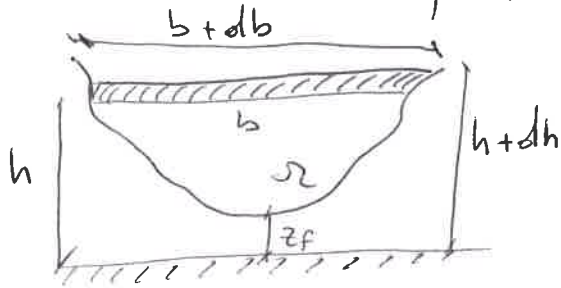
$j = \frac{\tau_0 B}{\rho g \Omega} \rightsquigarrow \boxed{j \rho \Omega = \frac{\tau_0 B}{\rho}}$

dato $\tau_0 = \rho \frac{v^2}{g^2} (= -\tau_f) \rightsquigarrow j = \frac{v^2 B}{\rho \Omega g^2} \left| \begin{array}{l} \frac{v^2}{\rho R_i g^2} \\ \frac{Q^2}{\rho g^2 R_i \Omega^2} \end{array} \right.$

La dissipazione j è direttamente proporzionale alla velocità / portata.

Cambio di variabili $(x, t) \rightarrow (Q, h)$
 spazio tempo \rightarrow portata sup. libera

Variatione delle superficie libere



$$\Omega(t) = \Omega(h(t))$$

• equazione di continuità

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$d\Omega = \frac{(b + (b+db)) dh}{2}$$

incremento di sezione nel tempo

↳ $\frac{d\Omega}{dh} = b$ quindi $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\Rightarrow \left| b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \right|$$

• equazione di quantità di moto

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} + \rho \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0 B}{\rho} = 0 \quad \left(\text{con } \frac{\tau_0 B}{\rho} = g \Omega j \right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} = \Omega \frac{\partial U^2}{\partial x} + U^2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \left(\text{con } U = \frac{Q}{\Omega} \right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \quad \text{variazione di sezione nello spazio}$$

$$\Omega(x) = \Omega[h(x), x]$$

$$\hookrightarrow b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \left(b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g \Omega j = 0 \right|$$

Δ 2 equazioni NON-lineari in funzione di h, a ~~di II grado~~ → 2 condizioni al contorno.

└ portate costante

└ valore noto di superficie libera

"gr(j-if)"

sisteme $f(h, Q)$

$$\left\{ \begin{aligned} b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \left(b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g \Omega j &= 0 \end{aligned} \right.$$

DISTINZIONE
TIPO DI CORRENTE

VELOCE

$$U > \sqrt{g Y_m}$$

CRITICA

$$U = \sqrt{g Y_m}$$

LENTA

$$U < \sqrt{g Y_m}$$

Adimensionale \rightarrow Numero di Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g Y_m}}$$

$$Fr \begin{cases} > 1 & \text{veloce} \\ = 1 & \text{critica} \\ < 1 & \text{lenta} \end{cases}$$

ipotesi di termini costanti

$$\begin{cases} \text{I. } Q = \text{cost} \\ \text{II. } E = \text{cost} \\ \text{III. } S = \text{cost} \end{cases}$$

I ipotesi \rightarrow portata costante, variazione di H e $S(E, S)$

$$\begin{cases} E = \gamma + \frac{U^2}{2g} & \rightarrow & E = \gamma + \frac{Q^2}{2g \Omega^2} \\ S = \rho_0 \Omega + \rho \Omega U^2 & \rightarrow & S = \rho_0 \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} \end{cases}$$

		E	S
Per	$\gamma = 0$	∞	∞
Per	$\gamma = \infty$	∞	∞

\Rightarrow Valore di minimo corrispondente alla critica (γ_c)

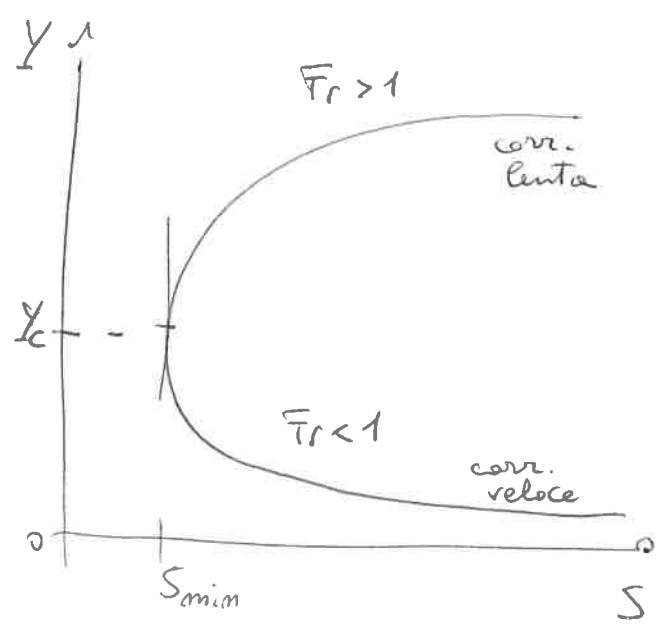
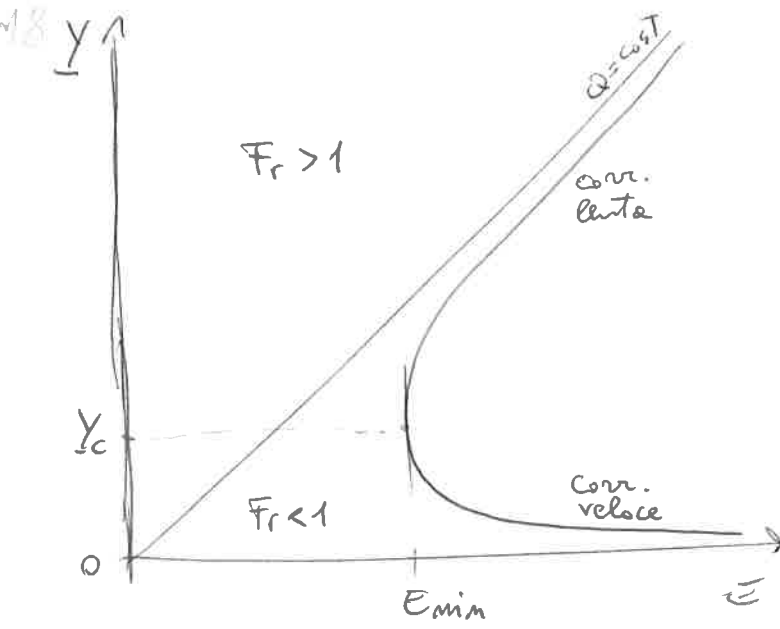
$$\left. \frac{dE}{d\gamma} \Big|_Q = 0 \rightarrow 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 0 \right\}$$

$$\left. \frac{dS}{d\gamma} \Big|_Q = 0 \rightarrow \gamma \Omega - \rho b \frac{Q^2}{\Omega^2} = 0 \right\}$$

$$\boxed{\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{b}}$$

$$E_{\min} = \gamma_c + \frac{\Omega}{2b} ; \quad S_{\min} = \gamma \Omega \left[\gamma_c + \frac{\Omega}{b} \right]$$

- * la corrente lenta guadagna energia alzando la profondità
- * la corrente veloce guadagna energia alzando la velocità



Per ogni valore di energia/spinta corrispondono due valori di profondità lenta/veloce.

→ In alveo rettangolare $\Omega = yb$

quindi $\frac{Q^2}{g} = \frac{b^3 y_c^3}{b} \rightarrow$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}}$$

altezza critica dipendente da Q e b

* $E_{min} = \frac{3}{2} y_c$

* $S_{min} = \frac{3}{2} y_c b y_c^2$

II ipotesi → energia costante, variazione di Q e S.

$$\begin{cases} Q = \Omega \sqrt{2g(E - y)} \rightarrow y \in [0; E] \\ S = \rho g \Omega + \rho g U^2 \end{cases}$$

	Q	S
Per $y=0$	0	∞
Per $y=E$	0	$\infty(E)$

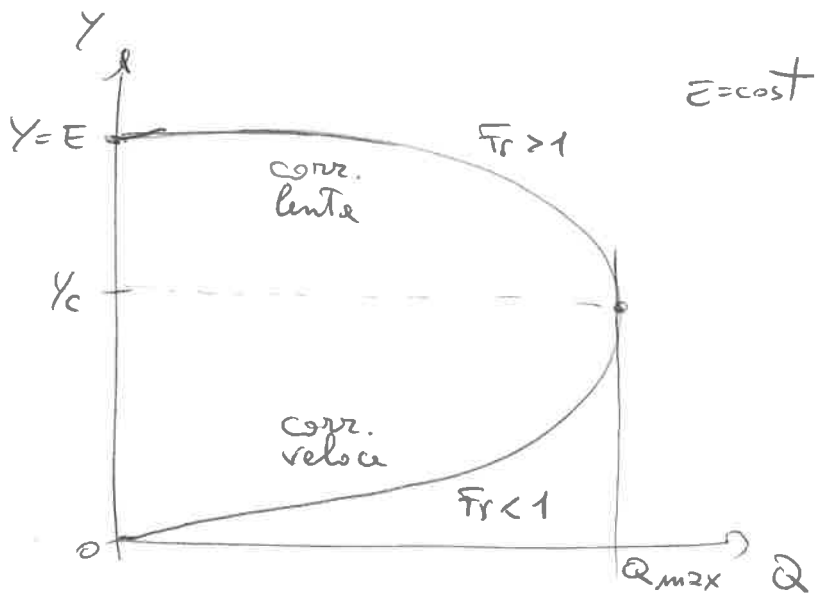
La portata ha un massimo corrispondente alla quota critica in energia costante

$$\left. \frac{dQ}{dy} \right|_E = 0 = \sqrt{2g} \left(\frac{d\Omega}{dy} \sqrt{E-y} - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{E-y}} \right) \rightarrow Q_{max}$$

$$Q_{max} = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{b}}$$

infatti $U_{max} = \sqrt{g \cdot y}$ velocità critica

Per $\begin{cases} y > y_c & c. \text{ lenta} \rightarrow Fr < 1 \\ y < y_c & c. \text{ veloce} \rightarrow Fr > 1 \end{cases}$



Un valore di portata $Q < Q_{max}$ corrisponde a due valori di altezza Y , una lenta ed una veloce.

In alveo rettangolare $\Omega = b \cdot Y \rightarrow Y_c = \frac{2}{3} E$
 quindi $Q_{max} = \frac{2}{3} E \cdot b \sqrt{\frac{2}{3} E g}$

III ipotesi \rightarrow spinta costante, variazione di Q ed E .

$$\begin{cases} Q = \sqrt{\frac{\Omega}{\rho}} [S - P_0 \Omega] \rightsquigarrow Y \in [0, Y_{max}] \\ E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \end{cases}$$

Y_{max} corrisponde a $S = P_0 \Omega$

	Y	Q	E
Per	$Y=0$	0	∞
Per	$Y=Y_{max}$	0	∞

La portata ha un massimo corrispondente alle ~~portate~~ quote critiche in spinta costante.

$$\left. \frac{dQ}{dY} \right|_S = 0 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\Omega}{dY} (S - P_0 \Omega) - \Omega^2 \gamma \right] \rightarrow Q_{max}$$

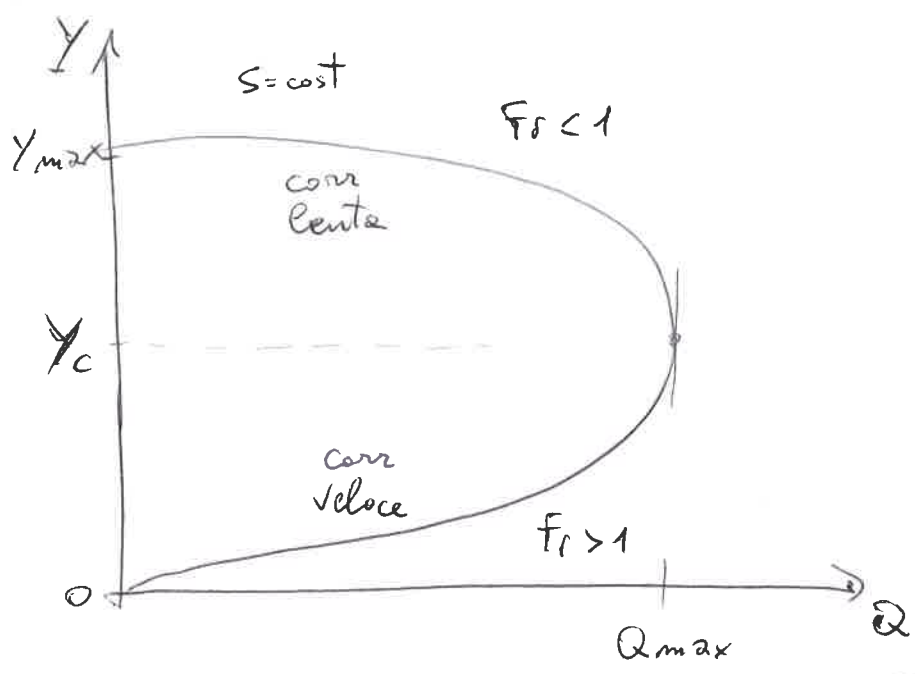
$$Q_{max} = \sqrt{\frac{\Omega}{\rho} \left(\gamma \frac{\Omega^2}{b} \right)}$$

identico al caso di energia costante
 $Q = \Omega \sqrt{\frac{\rho}{b} g}$

La spinta in condizione critica è

$$S = \gamma \Omega \left(\frac{\Omega}{b} + Y_c \right) = \text{costante}$$

$$\text{Per } \begin{cases} Y > Y_c \rightarrow \text{corr. lenta} & Fr < 1 \\ Y < Y_c \rightarrow \text{corr. veloce} & Fr > 1 \end{cases}$$



Uno stesso valore di portata corrispondono due valori di profondità, definite CONIUGATE.

Im alveo rettangolare $Q = bY$
 dato che $S = \gamma b \frac{3}{2} Y_c^2$

$$Y_c = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{S}{g}}$$

La portata massima vale sempre

$$Q_{max} = \frac{1}{2} \cdot b \sqrt{g \cdot Y_c}$$

Le profondità coniugate Y_1 e Y_2 nei grafici sono legate dalla relazione

$$Y_2 = \frac{Y_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} \right)$$

L'altezza critica nelle varie ipotesi NON corrisponde

$$\Delta \quad Y_{c|E} \neq Y_{c|Q}$$

Nelle condizioni critiche $Fr=1$ si hanno:

Portata massima, Energia e Spinta minime.

Unico caso di coincidenza con assegnate portate massima

$$\begin{cases} Y_{c|E} = Y_{c|Q} = Q_{max|E} \\ Y_{c|Q} = Y_{c|E} = E_{min|Q} \end{cases}$$

altezza a portata massima con energia costante

altezza a energia minime con portata costante.

$$Y_{c|S} = Y_{c|Q} = Q_{max|S}$$

altezza a spinta minime con portata costante

PENDENZA CRITICA

i_{fc} per cui $Y_u \rightarrow Y_c$

sistema di Cauchy $\begin{cases} Q = C \Omega \sqrt{g R_i} \varphi_0 & \text{moto uniforme} \\ \frac{Q^2}{g} = \left(\frac{\Omega^3}{b}\right)_{Y_c} & \text{stato critico} \end{cases}$

\Rightarrow a $Q = \text{cost}$ è condizione al contorno da monte,

pendenza critica $i_{fc} = \left(\frac{B}{b C^2}\right)_{Y_c}$

Rapporto pendenze uniforme e critica

$\frac{i_f}{i_{fc}} = \frac{(g C^2 R_i \Omega^2)_{Y_c}}{(g C^2 R_i \Omega^2)_{Y_u}}$

termini critici Y_c
 termini uniforme Y_u

se $\begin{cases} i_f > i_{fc} \rightarrow \text{corr. veloce} & Y_u < Y_c \\ i_f < i_{fc} \rightarrow \text{corr. lenta} & Y_u > Y_c \end{cases}$

La analisi dell'equazione di ENERGIA $H = h + \alpha \frac{V^2}{2g}$ ($\alpha \approx 1$)

$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial x}$

sistema di Cauchy $\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} + j\right) = 0 \end{cases}$

Sviluppo del moto

$U \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial (U \Omega)}{\partial x} + U \Omega \frac{\partial U}{\partial x} + g \Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} + j\right) = 0$

$\frac{\partial h}{\partial x} = -j - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x}$

dividendo per il termine "g Ω "

Quindi l'energia $\frac{\partial H}{\partial x} = -j - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = -j - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$

la variazione di velocità nel tempo porta alla variazione di energia nello spazio.

VALUTAZIONE DEL FROUDE CRITICO

$$Fr^2 = \frac{U^2}{g \cdot Y_m}$$

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g \frac{\Omega^3}{b}} \quad \text{se } \begin{cases} Fr_u < 1 & \text{corr. lenta} \\ Fr_u > 1 & \text{corr. veloce} \end{cases}$$

Per $Fr_u \rightarrow Fr_c = 1$ corr. critica

Sostituendo Q di G.S.:

$$Fr^2 = \frac{C^2 \Omega^2 g R_i \varphi}{g \frac{\Omega^3}{b}} = \frac{\varphi C^2 b}{B}$$

impatti per stato critico $Fr=1$, si ha $\varphi_c = \frac{B}{C^2 b}$ ✓

Per l'ipotesi di alveo rettangolare largo

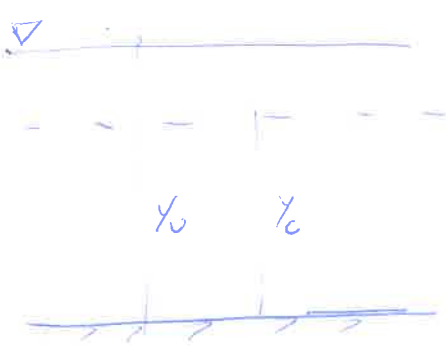
$$Q = k_s \sqrt{\varphi} b Y_u^{5/3} \quad \rightarrow \quad Fr^2 = \frac{(k_s \sqrt{\varphi} b Y_u^{5/3})^2}{g \frac{\Omega^3}{b}} = \frac{Q^{1/5} k_s^{3/5} \varphi^{3/10}}{g b^{1/5}}$$

* debole dipendenze da Q e da b , forte dipendenze di k_s e φ .

NATURA ALVEO tramite il confronto tra altezza

uniforme e altezza critica

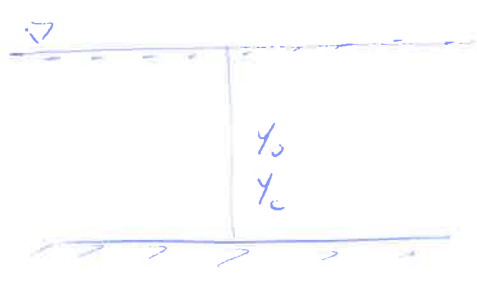
- $Y_u > Y_c \rightarrow$ alveo fluviale (corr. lenta)
- $Y_u < Y_c \rightarrow$ alveo torrentizio (corr. veloce)



ALVEO FLUVIALE

$$Fr < 1$$

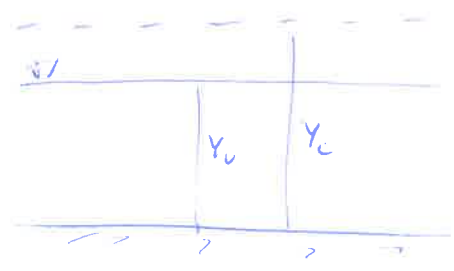
$$\varphi < \varphi_c$$



ALVEO CRITICO

$$Fr = 1$$

$$\varphi_0 = \varphi_c$$



ALVEO TORRENTIZIO

$$Fr \geq 1$$

$$\varphi > \varphi_c$$

CLASSIFICAZIONE CORSO D'ACQUA

schema della granulometria

	grana grossa	grana fine
materiale	eterogeneo	omogeneo
D_{50}	$> 16 \text{ mm}$	$0,06 \div 2 \text{ mm}$
pendenza if	$0,1 \div 1\%$	$0,01 \div 0,1\%$
trasporto	di fondo	in sospensione
forme fondo	barre	dune/barre

→ Al fondo del corso si forma uno strato più grossolano, mentre il terreno fine si posa in profondità



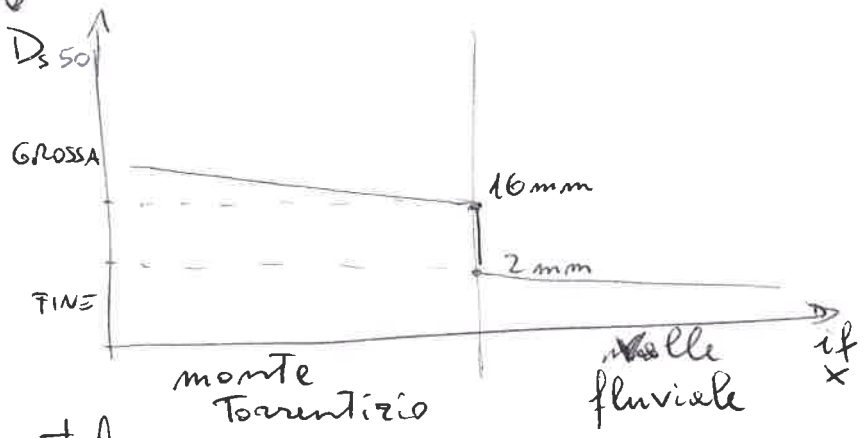
AUTOPROTEZIONE.

In alvei torrentizi si ha grana più grossa, in alvei fluviali si ha grana più fine.

SELEZIONE IDRODINAMICA

il salto si ha per cambio di trasporto

- GROSSA → sul fondo
- FINE → sospesa



$C = 6 + 2,5 \ln\left(\frac{V}{\epsilon}\right)$ sperimentale

* Attrito sul fondo mobile → carattere non-lineare

VARIABILI $\begin{cases} \text{PRINCIPALI } Q, h \\ \text{ENERGETICHE } H, E, S \end{cases}$

• CARICO TOTALE $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = h + \alpha \frac{V^2}{2g}$

• ENERGIA SPECIFICA $E = H - z_f = Y + \frac{\alpha Q^2}{2g \Omega^2}$

• SPINTA $S = \rho g \Omega + \rho \beta \Omega V^2 = \frac{1}{2} \gamma b Y^2 + \rho \frac{Q^2}{b Y}$

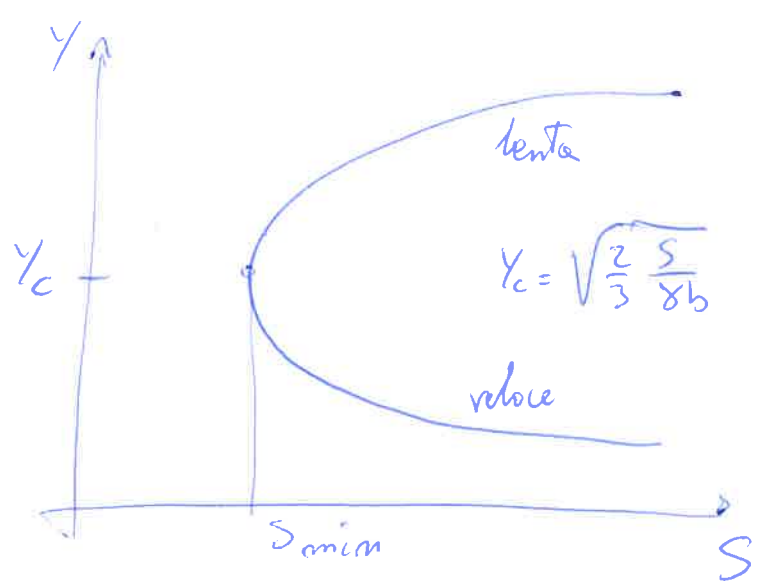
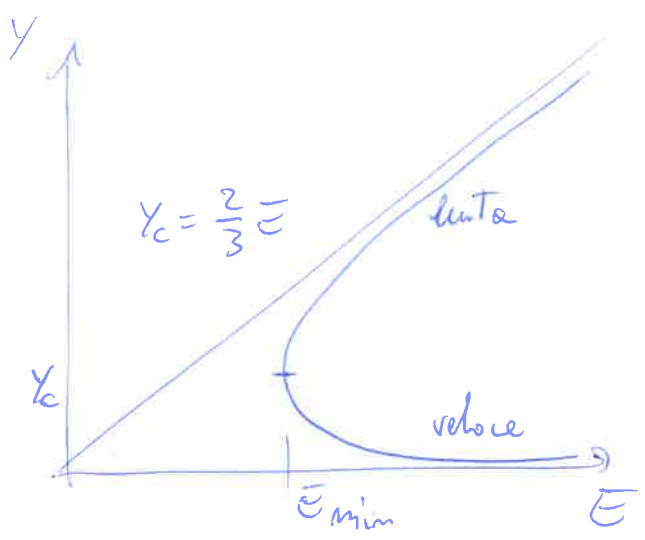
equazioni in termini di Q e h

1D: $\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (\Omega V^2)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0 B}{\rho} = 0 \end{cases}$

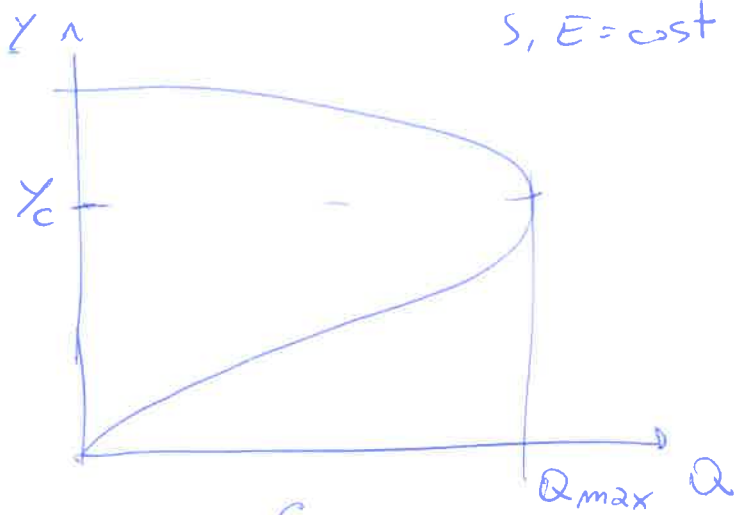
$\begin{cases} b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q^2}{\Omega^2} \left(b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{1}{h} \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g \Omega j = 0 \end{cases}$
+ 2 cond. al contorno

classificazione corrente	$\begin{cases} Fr < 1 \\ Fr = 1 \\ Fr > 1 \end{cases}$	lenta	$Y_0 > Y_c$	ALVEO FLUVIALE
		critica	$Y_0 = Y_c$	CRITICO
		veloce	$Y_0 < Y_c$	TORRENTIZO

stato critico: $\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{b} \implies Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}$



$$S, E = \text{cost}$$



$$Q_s \begin{cases} Q_{\max} = \frac{2}{3} E \cdot b \sqrt{\frac{2}{3} E g} \\ Q_{\max} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{S}{g}} \sqrt{g^2 \frac{2}{3} \frac{S}{g b}} \end{cases}$$

pendenza $\begin{cases} \text{bassa} & if < if_c \rightarrow \text{lenta} & y_0 > y_c \\ \text{alta} & if > if_c \rightarrow \text{veloce} & y_0 < y_c \end{cases}$

$$if_c \text{ pendenza critica} = \left(\frac{B}{b g^2} \right) y_c$$

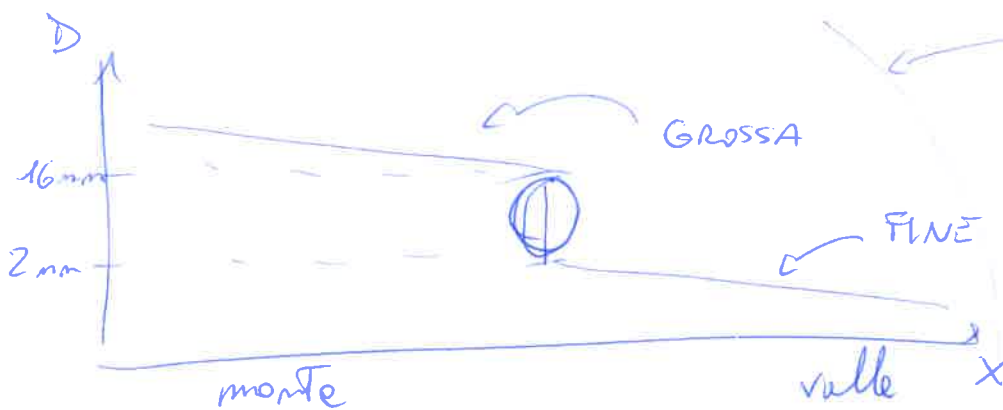
\Rightarrow NUM. DI FROUDE

$$Fr^2 = \frac{U^2}{g y} = \frac{if g^2 b}{B}$$

corso d'acqua reale \rightarrow geomorfologia del fondo

grossa \rightarrow alveo torrentizio: trasporto sul fondo

fine \rightarrow alveo fluviale: trasporto in sospensione



selezione idrodinamica

22 CORRENTI STAZIONARIE

Stazionarietà \rightarrow indipendenza dal tempo $\frac{\partial \text{moto}}{\partial t} = 0$

EQUAZIONI delle CORRENTI, nel sistema di Cauchy:

$$\begin{cases} b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \rightsquigarrow \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ quindi } \boxed{Q = \text{cost}} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left[g \Omega - \frac{Q^2}{b \Omega^2} b \right] - \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + g \Omega j = 0 \end{cases}$$

I condizione: da monte e $Q = \text{cost}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

\Rightarrow equaz. del moto $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \left[g \Omega - \frac{Q^2}{\Omega^2} b \right] - \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + g \Omega j = 0 \right)$

Variazione della superficie nello spazio

$$\frac{\partial h}{\partial x} =$$

$$\frac{\frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - g \Omega j}{g \Omega - \frac{Q^2}{\Omega^2} b} \cdot \frac{\frac{Q^2}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - j}{1 - Fr^2}$$

$\Rightarrow \frac{dh}{dx} = f(h, Q, x)$

II condizione: $h = h_0$ punto moto di superficie

\rightarrow a valle se ~~can~~ alveo fluviale

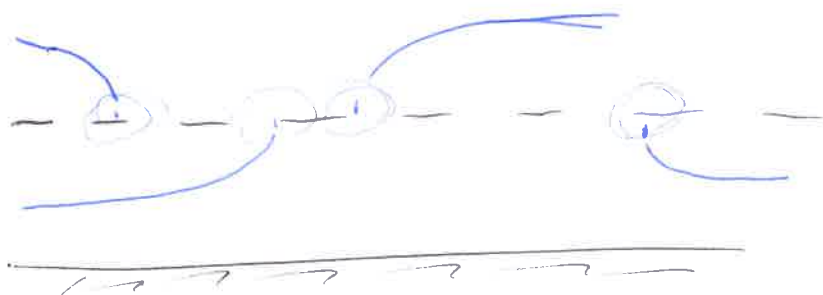
\rightarrow a monte se alveo torrentizio

Il termine $\frac{Fr^2}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h$ significa che le correnti veloci sono

molto più sensibili alle variazioni della geometria.

Se $Fr^2 = 1$ sia h è stato critico e $\frac{dh}{dx}$ vale ∞ !

Tendenza della superficie libera al profilo verticale nei pressi dello stato critico.



Il termine \dot{s} indica la cadente piezometrica legata alle scelezze Q : $\dot{s} = \frac{Q^2}{S \left[\int_b C Y^{3/2} \cos \alpha dY \right]^2}$

con $\left\{ \begin{array}{l} C = 6 + 2.5 \ln \left(\frac{R_H}{\epsilon} \right) \\ C = \frac{K_S}{\sqrt{S}} R_H^{1/6} \end{array} \right. \rightarrow$ parametri da definire (ϵ, K_S)

Analizzando la profondità z in funzione dello spazio $Y = h - z_f$, il fondo è dato dal Termine di pendenze if

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dz_f}{dx} = \frac{dh}{dx} \rightsquigarrow \left(\frac{dh}{dx} = \frac{dY}{dx} - if \right)$$

~~$\frac{dY}{dx}$~~ $\Omega(x) = \Omega[h(x), x]$ sezione geometrica nello spazio in $h(x)$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_x \cdot \frac{dh}{dx} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h = b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h \right)$$

$\Omega(x) = \Omega[Y(x), x]$ sezione geometrica nello spazio in $Y(x)$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \Big|_x \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y = \left(b \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y \right)$$

Allora vale $\rightarrow b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h = b \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y$

Ottenendo $\Rightarrow \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h = b if + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y \right]$
 pendenza fondo Termine non cilindrico

• Variazione della sezione per la pendenza o per la non cilindricità, della variazione della larghezza, e profondità fissa -

ALVEO CILINDRICO $\rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y = 0$

Quindi $\frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h = b if + Y \frac{db}{dx} = b \cdot if$

23
L'equazione in termini di profondità y il sistema è

$$\begin{cases} Q = \text{cost} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{Fr^2}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + if - j}{1 - Fr^2} \end{cases}$$

La singolarità della condizione critica si conserva

In ipotesi di alveo non cilindrico si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{Fr^2}{b} y \frac{db}{dx} + if - j}{1 - Fr^2}$$

Nella variazione geometrica di allargamento $\frac{db}{dx} > 0$

corr. lenta $Fr < 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$ si alza

corr. veloce $Fr > 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$ si abbassa

Il termine "if - j" è la variazione di energia specifica

$$\frac{dE}{dx} = if - j$$

IPOTESI di ALVEO CILINDRICO \rightarrow Sezione Ω fissa.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad \text{allora} \quad \begin{cases} \beta = 1 \\ if = \text{cost} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{if - j}{1 - Fr^2} \\ \frac{dh}{dx} = \frac{Fr^2 if - j}{1 - Fr^2} \end{cases}$$

Ⓘ CASO LIMITE: $y \rightarrow y_0$ moto uniforme

$j = if$ quindi $y = \text{cost} \rightarrow y_0$

Pendenza h stessa del fondo, parallela

Ⓡ CASO LIMITE: $y \rightarrow y_c$ stato critico

$Fr = 1$ quindi $\frac{dy}{dx}, \frac{dh}{dx} \rightarrow \infty$ discontinuità

La superficie libera h è ortogonale al fondo.

III CASO LIMITE: $Y \rightarrow \infty$ grande profondità
 $Fr^2 \text{ if } -\dot{s} = 0$ corrente non dissipa e resta ferma -
 La superficie libera h è orizzontale.

IV CASO LIMITE: $Y \rightarrow 0$ piccola profondità
 $\left. \begin{matrix} Fr^2 \\ \dot{s} \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty$ singolarità, forte dissipazione.

Per discontinuità, superficie libera h ortogonale al fondo.

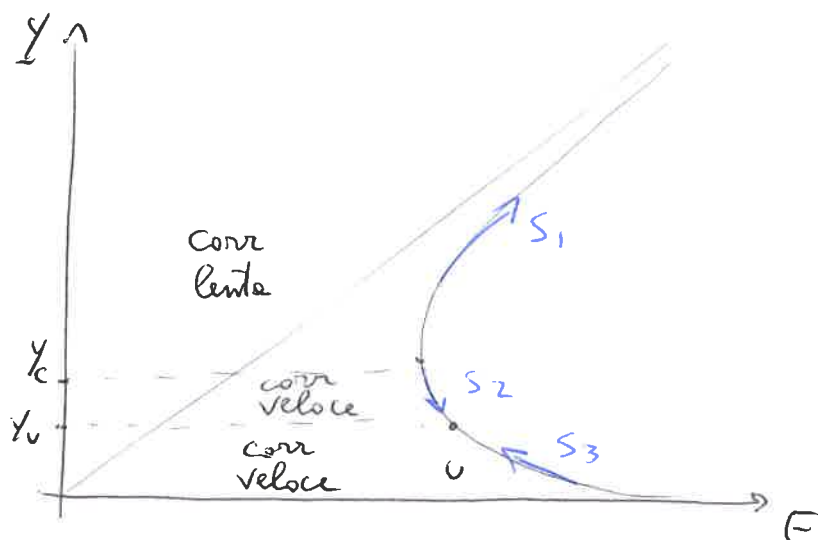
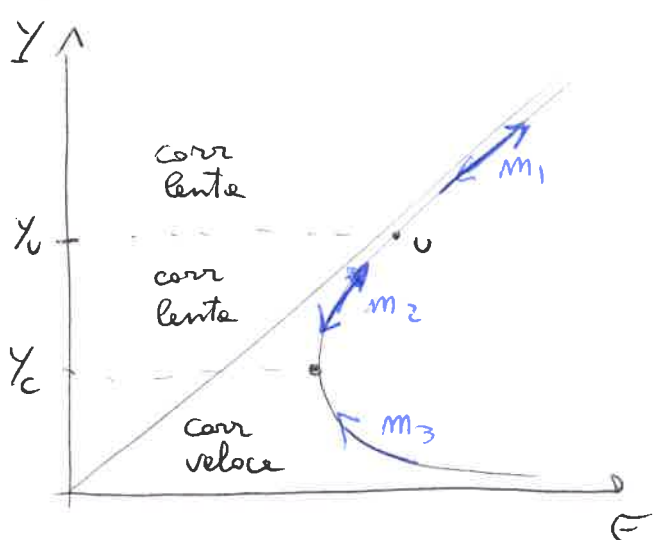
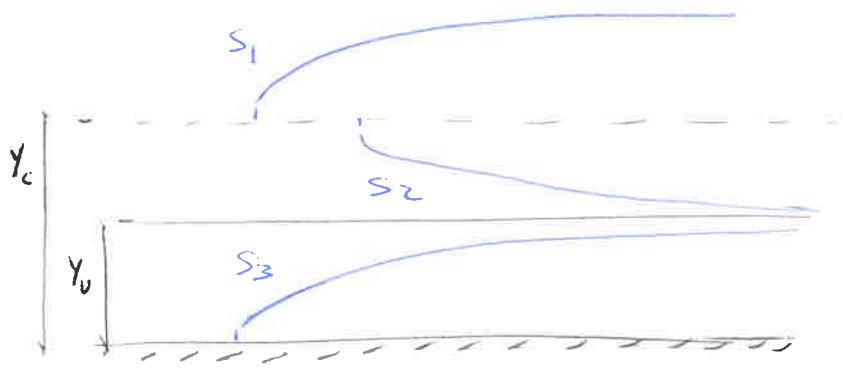
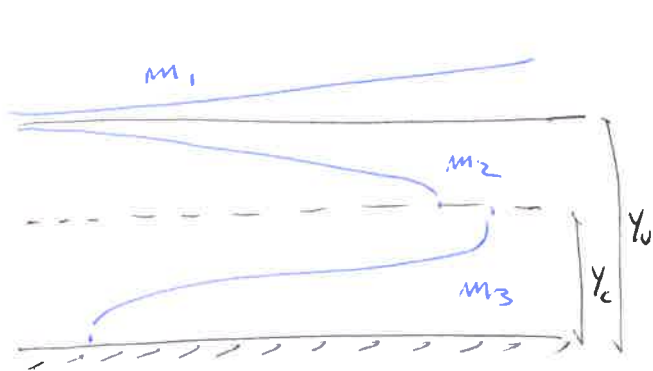
Relazione generale su $\frac{dy}{dx} = \frac{if - \dot{s}}{1 - Fr^2}$!

numeratore e denominatore concordi $\frac{dy}{dx} > 0$ $\begin{cases} Y > (Y_u, Y_c) \\ Y < (Y_u, Y_c) \end{cases}$ superficie si alza (\rightarrow fluviale)
 dissipazione minore

numeratore e denominatore discordi $\frac{dy}{dx} < 0$ $\begin{cases} Y_c < Y < Y_u \\ Y_u < Y < Y_c \end{cases}$ superficie si abbassa (\rightarrow torrentizio)
 dissipazione maggiore

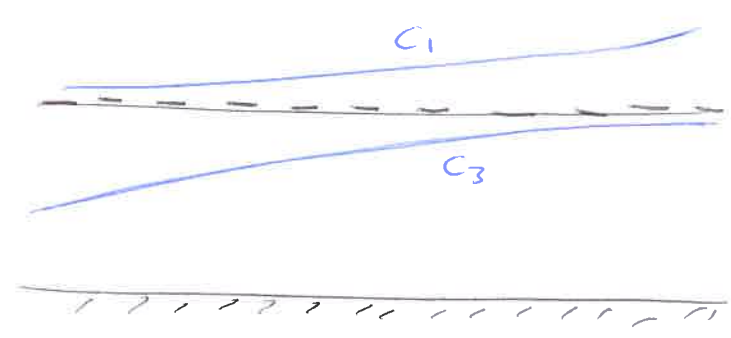
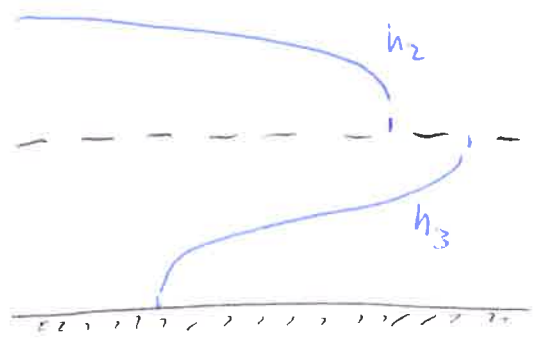
ALVEO FLUVIALE

ALVEO TORRENTIZIO



ALVEO ORIZZONTALE $Y_0 \rightarrow \infty$

ALVEO CRITICO $Y_0 \rightarrow Y_c$



Assegnata una condizione di portata da monte $Q = \text{cost}$ nota, si ottengono due soluzioni di profondità, per corrente lenta e veloce. Il profilo reale è dato dalla seconda condizione al contorno: nota la superficie libera in una sezione di controllo $h \rightarrow h_0$.

• SEZIONE DI CONTROLLO: sezione dove vige un legame fra portata e profondità, attraverso una scala di deflusso:

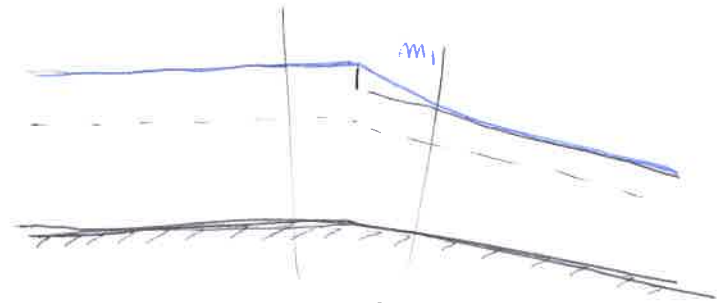
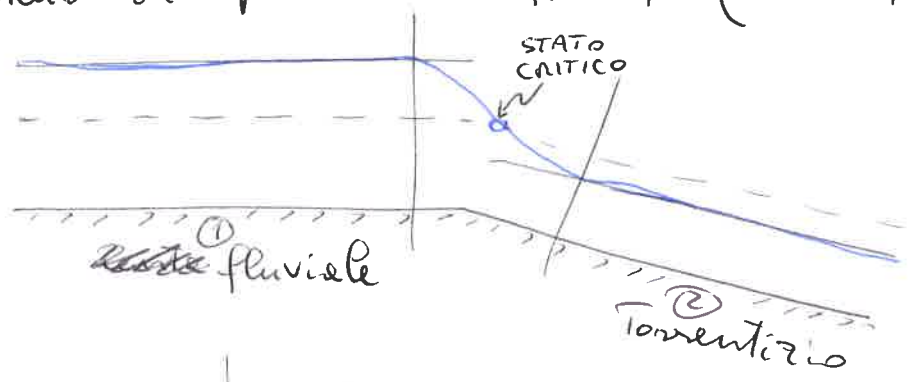
→ moto uniforme $Y = \left(\frac{Q}{k_s \sqrt{i} b} \right)^{3/5}$

→ stato critico $Y = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}$

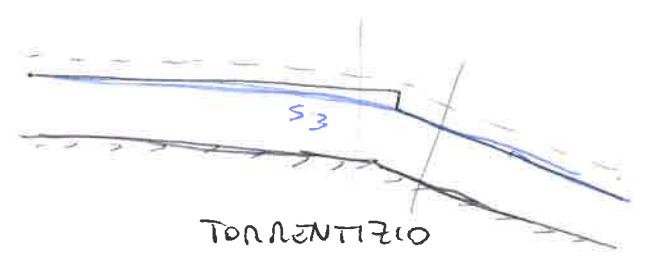
⇒ Ogni manufatto è sezione di controllo:

Cambio di pendenza $i_1 \rightarrow i_2$ (con $i_1 < i_2$)

controllo
fluviale → da valle
torrenziale → da monte

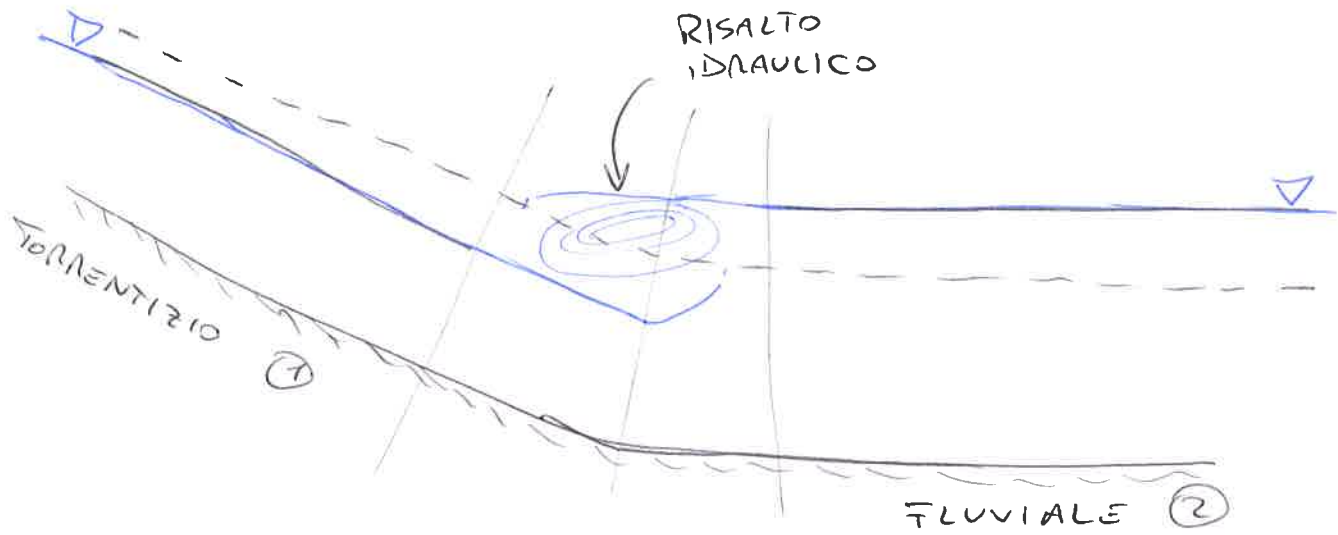


FLUVIALE



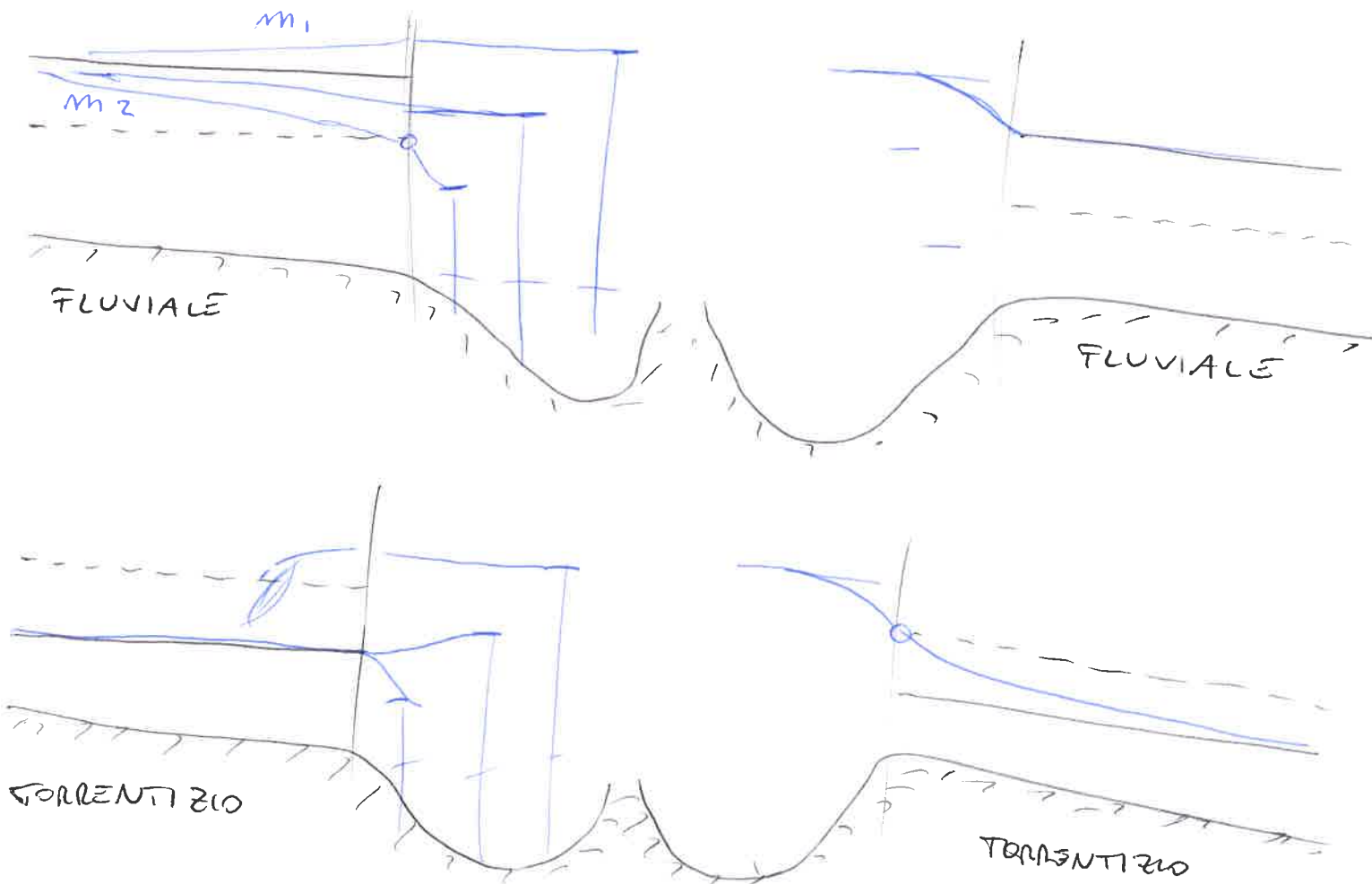
TORRENTIZIO

Cambio di pendenza $if_1 \rightarrow if_2$ (con $if_1 > if_2$)

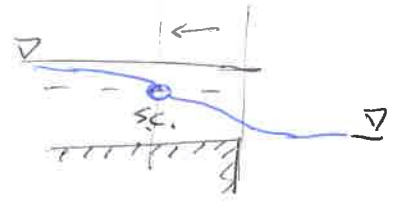


Il controllo da monte per il tratto torrentizio ed il controllo da valle per il tratto fluviale porta alla duplicità della soluzione nel cambio pendenza. Per cui si ha risalito idraulico per DISCONTINUITÀ e forte dissipazione energetica, per coesistenza di entrambi i profili lento e veloce.

CASO PARTICOLARE: IMBOCCO e SBOCCO IN LAGO



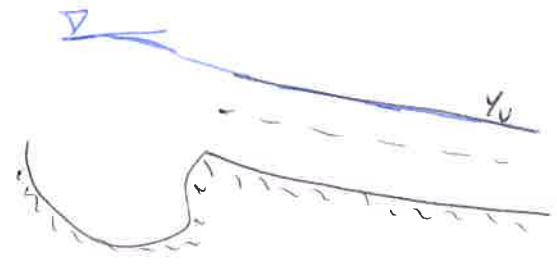
25
 Lo stramezzo, per una corrente lenta, in un lago più basso anticipa l'attraversamento dello stato critico.



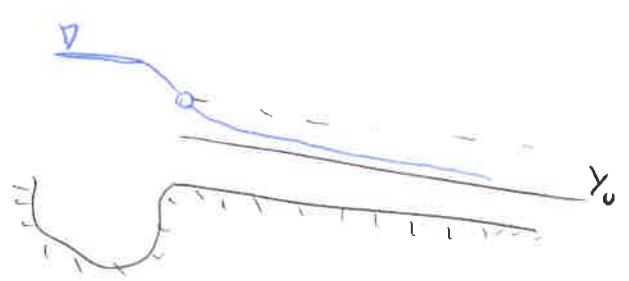
Il ~~lo~~ sbocco in un lago con superficie libera alta da un alveo torrentizio provoca risalto idraulico, sempre a monte della sezione.

Mentre nel caso dello sbocco è nota la condizione a monte, nell'imbocco non è nota la portata $Q = \text{cost}$, da ipotizzare. Di conseguenza è incognita la relazione tra Y_0 e Y_c del canale, quindi la natura dell'alveo.

Casi: alveo fluviale



alveo torrentizio



L'energia del lago vale $E_0 = h_0 - z_f = Y_m + \frac{Q^2}{2g S_m^2}$, condizione a monte.

Per $Y_0 \rightarrow Y_m$ si ha $h_0 - z_f = \left(\frac{Q}{k_s \sqrt{f} b} \right)^{3/5} + \frac{Q^2}{2g b^2 \left(\frac{Q}{k_s \sqrt{f} b} \right)^{3/5}}$

da cui si ricava la portata Q del moto uniforme.

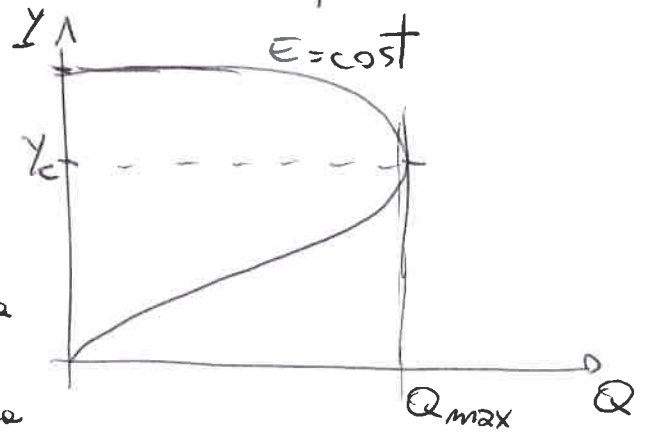
Si controlla con la portata massima dello stato

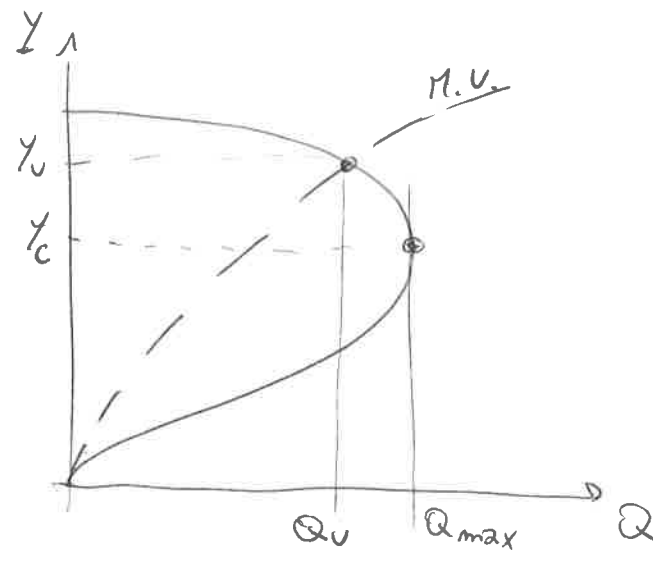
critico ~~o per~~

$$\begin{cases} Y_c = \frac{2}{3} E_0 \\ Q_{max} = \frac{2}{3} b E_0 \sqrt{g \frac{2}{3} E_0} \end{cases}$$

altezza critica

portata critica





Il moto uniforme (M.U.) è regola-
to da $Y_0 = \left(\frac{Q_U}{K_s \sqrt{f} b} \right)^{3/5}$

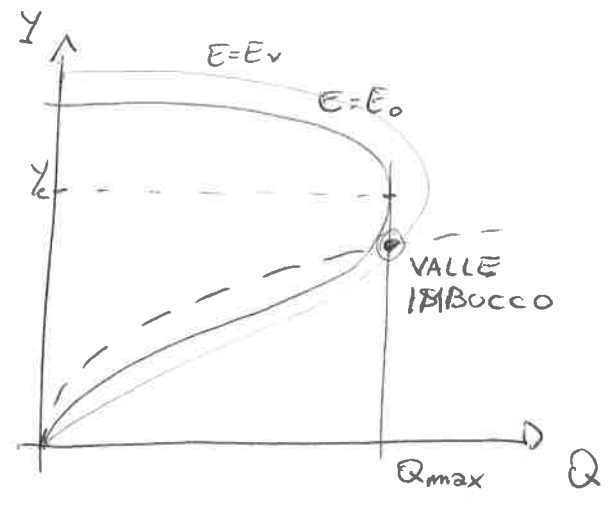
⇒ L'intersezione indica le portate di deflusso e energia assegnate.

La relazione VALE SOLO per alvei fluviali, fino allo stato critico.

Per alvei torrentizi si ipotizza l'attraversamento in critica e portata massima.

$$\begin{cases} Y_M + \frac{Q^2}{2g \Omega^2 M} = E_0 \\ Y_M = Y_c |_{E_0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_M = Y_c |_{E_0} \\ Q = Q_{max} |_{E_0} \end{cases}$$

Quindi il moto uniforme ottiene un'energia maggiore del lago $E_v > E_0$.

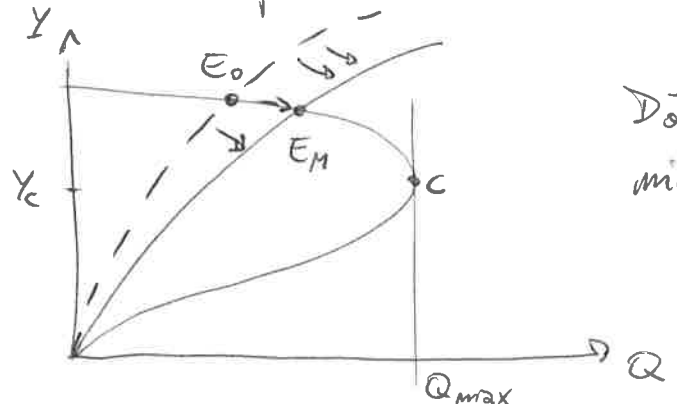


→ Agendo sulle forme dell'alveo per ridurre l'energia, si ha $E_M = E_0 - \xi \frac{v^2}{2g}$, con $0 < \xi < 1$ dovute all'opera.

Allora $Q' = Q \sqrt{1+\xi}$ è la portata di E_0 (maggiore della reale portata).

⇒ Il deflusso è $Y_0 = \left(\frac{Q'}{K_s \sqrt{f} b} \right)^{3/5}$, quindi le curve M.U.

si abbassa per riduzione dell'altezza.



Si avvicina alla condizione critica. Dato che Y si riduce, la portata è minore con dissipazione!

sezioni di controllo \rightarrow Manufatti e opere \Rightarrow

Fenomeni Localizzati

Con verifica di natura per cambio di condizioni dell'alveo

Δ Non vale l'ipotesi di acque basse: brusche variazioni o manufatti

- \rightarrow restringimento/allargamento
- \rightarrow gradino/salto
- \rightarrow luce di fondo

} DISCONTINUITA'
e Risalto Idraulico

Variazioni alveo/corrente:

lenta \rightarrow lenta

veloce \rightarrow veloce

veloce \rightarrow lenta

lenta \rightarrow veloce \Rightarrow unica condizione al contorno con passaggio in critica

Sistema di controllo

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \text{cost} \quad \text{info di monte} \\ S = \text{cost} \quad \text{oppure} \quad \Delta H = \Delta H_c \quad (E = \text{cost}) \end{array} \right.$$

La perdita in un manufatto $\bar{E}_M = \bar{E}_V + \sum \frac{V^2}{2g}$, quindi si ha $\bar{E}_M = \bar{E}_V + \Delta H_c$

La conservazione delle quantita di moto porta a definire la conservazione delle spinte -

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dv + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}_s) ds = \int_V \rho \vec{F} dv + \oint_S \vec{F} ds$$

$$(\rho \beta V^2 \Omega + \rho g \Omega)_M = (\rho \beta V^2 \Omega + \rho g \Omega)_V \quad \rightarrow \quad \boxed{S = \text{cost}}$$

usare $E = \text{cost}$ per fenomeni poco dissipativi (senza vorticita convergenza)

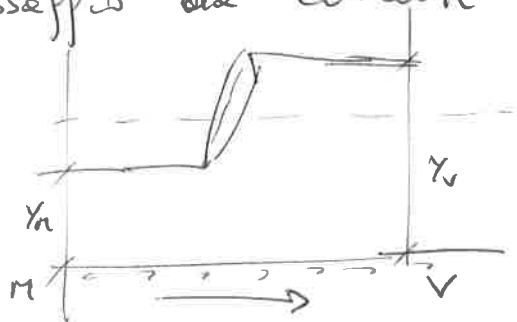
usare $S = \text{cost}$ per fenomeni molto dissipativi (con vorticita divergenza)

Relazioni energetiche

$$\begin{cases} \frac{E}{E_{min}} = \frac{2}{3} \frac{Y}{Y_c} + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_c}{Y} \right)^2 \\ \frac{S}{S_{min}} = \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{Y_c} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{Y_c}{Y} \end{cases}$$

Com $S = \text{cost}$: $E_{vel} > E_{lento}$
 Com $E = \text{cost}$: $S_{lento} > S_{vel}$

Passaggio da corrente veloce a lente provoca RISALTO



coesistenza della superficie libera di monte veloce con quelle di valle lente

↳ DISCONTINUITA'

$$\begin{cases} Q = \text{cost} \\ S = \text{cost} \end{cases} \begin{cases} U_n Y_n = U_v Y_v \\ \frac{1}{2} \gamma b Y_n^2 + \rho b Y_n U_n^2 = \frac{1}{2} \gamma b Y_v^2 + \rho b Y_v U_v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_n^2 = \frac{1}{2} g \frac{Y_v}{Y_n} (Y_n + Y_v)$$

NUMERO di FROUDE

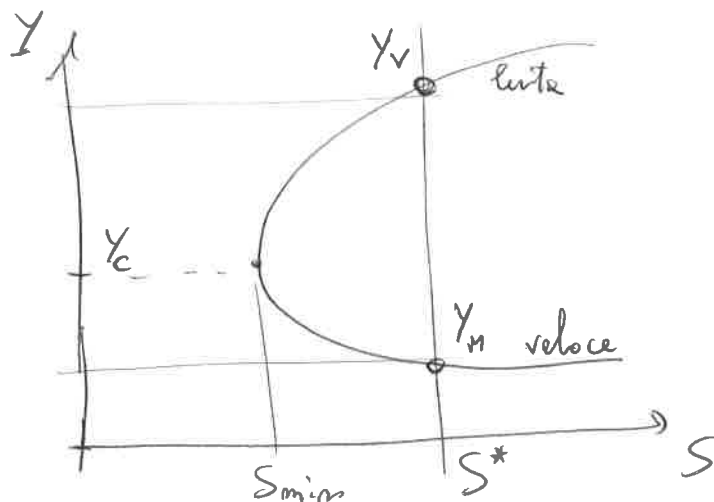
$$\begin{cases} Fr_n^2 = \frac{U_n^2}{g Y_n} = \frac{1}{2} \frac{Y_v}{Y_n} \left(\frac{Y_n + Y_v}{Y_n} \right) > 1 \quad \text{c. veloce} \\ Fr_v^2 = \frac{U_v^2}{g Y_v} = \frac{1}{2} \frac{Y_n}{Y_v} \left(\frac{Y_n + Y_v}{Y_v} \right) < 1 \quad \text{c. lente} \end{cases}$$

⇒ PROFONDITÀ CONIUGATE

~~$$Y_1 = \dots$$~~

$$\frac{Y_1}{Y_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8 Fr_2^2}$$

Alle stesse spinte corrispondono le due profondità Y_1 e Y_2 , cioè Y_v lente e Y_n veloce -

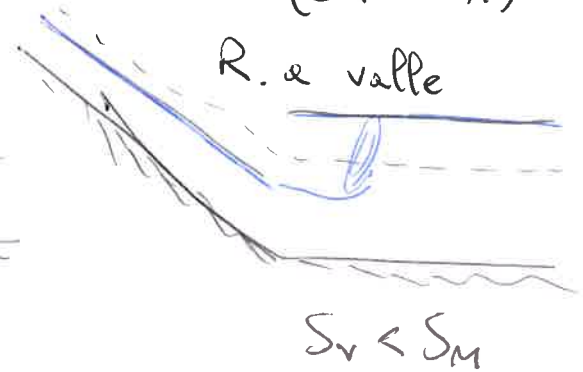
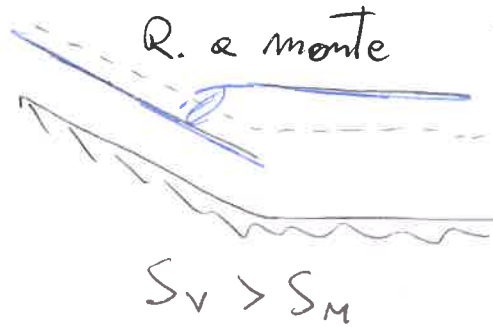


2.7 Com $S = \text{cost}$ si ha dissipazione energetica

$$\Delta E = E_v - E_m = \gamma_v + \frac{v_v^2}{2g} - \gamma_m - \frac{v_m^2}{2g} = \frac{(\gamma_m - \gamma_v)^3}{4\gamma_m\gamma_v} < 0$$

DISSIPAZIONE
($E_v < E_m$)

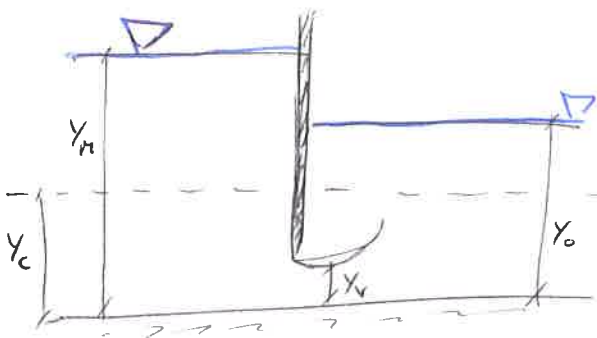
La possibilità di profili \bar{e} (in base alle spinte)



Fenomeno di corrente

LENTA \rightarrow VELOCE:

LUCE di FONDO



y_v è la profondità contratta, dipende dalle paratoie $y_v = a \cdot c$

Dato la geometria, si usa il bilancio di energia $E = \text{cost}$
 $\gamma_m + \frac{v_m^2}{2g} = \gamma_v + \frac{v_v^2}{2g}$; $Q = \text{cost}$

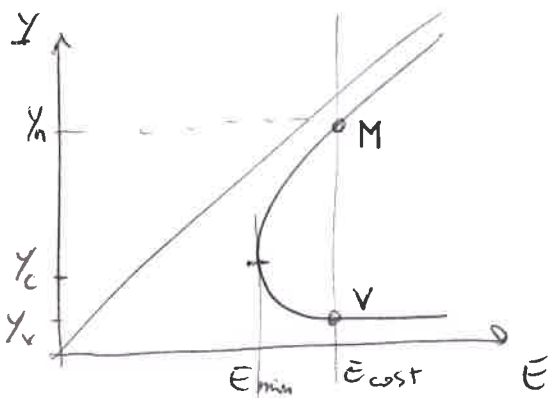
• Sono note le condizioni di valle (luce) da cui si ricava monte.

Il deflusso della luce è costante

$$Q = C_q \cdot A_c \cdot V_c = C_q \cdot b \cdot a \cdot \sqrt{2g y_m}$$

$$C_q = \text{coeff. di efflusso} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{y_m}}} \approx c$$

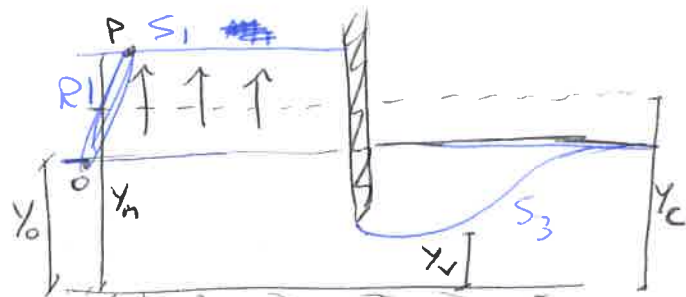
$$Q = c b a \sqrt{2g y_m}$$



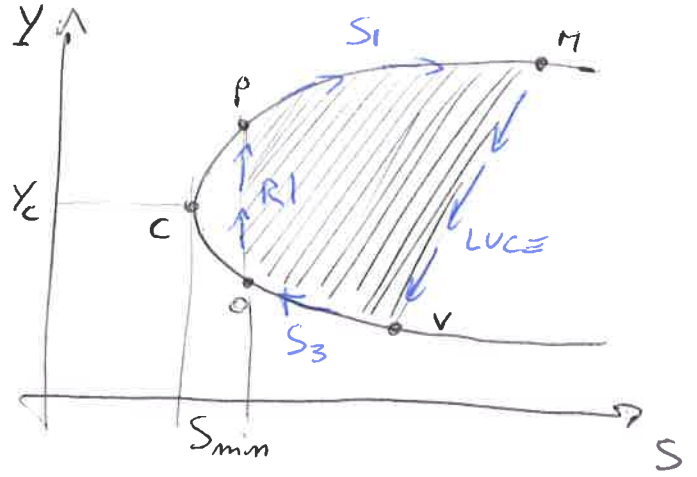
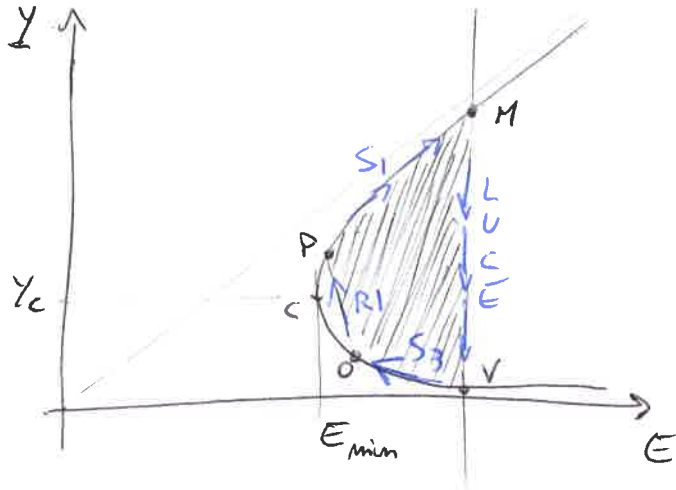
• MOTO INDISTURBATO: stato nel caso in cui il manno fatto non ci fosse, in corrispondenza delle sue posizioni.

\rightarrow M. IND. VELOCE $y_0 < y_c$

Luce libera, condizione al contorno interna.



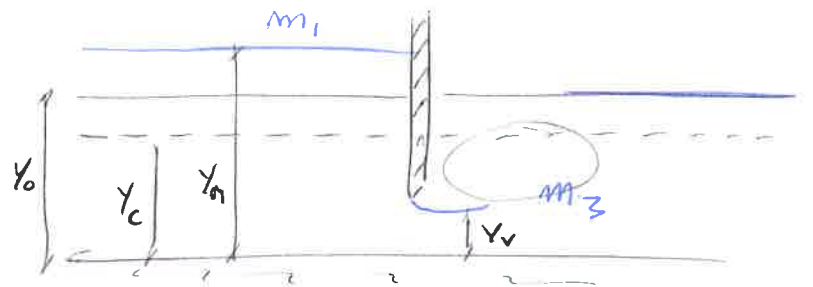
Si crea risalto idraulico a monte perché è corrente lenta in alveo torrentizio.



→ M. IND. LENTO

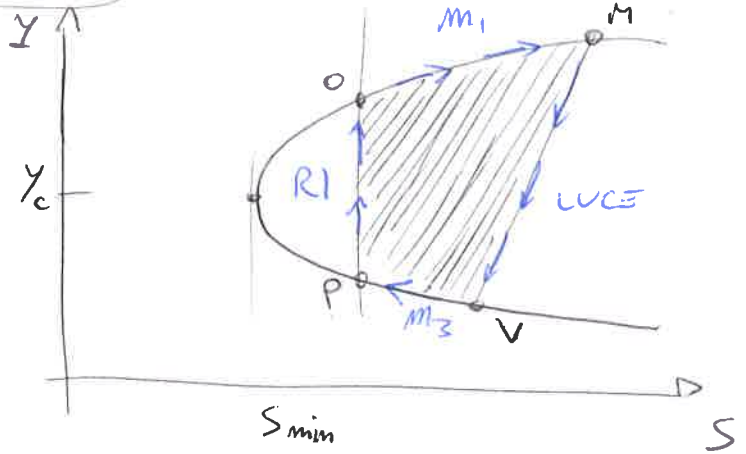
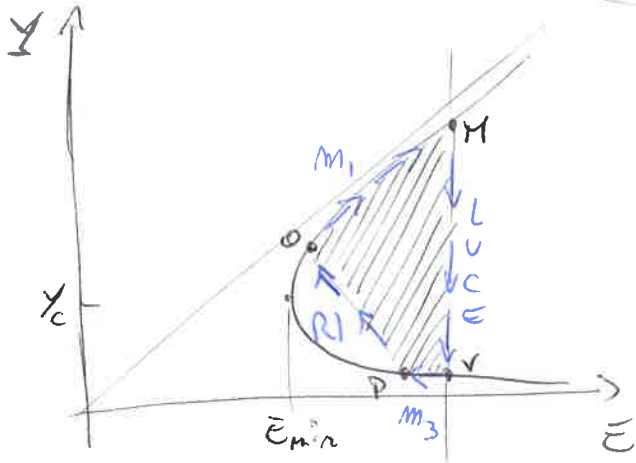
$$y_0 > y_c$$

Può essere a luce libera o a luce rigurgitata, in base alla spinta.



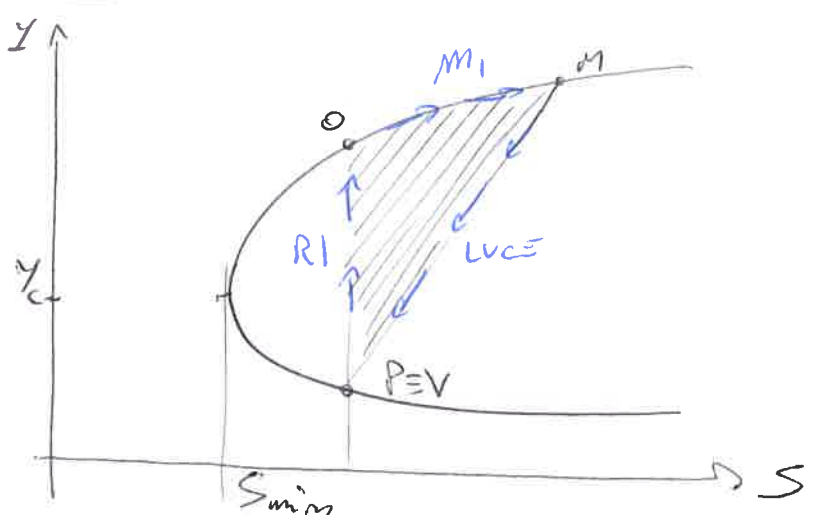
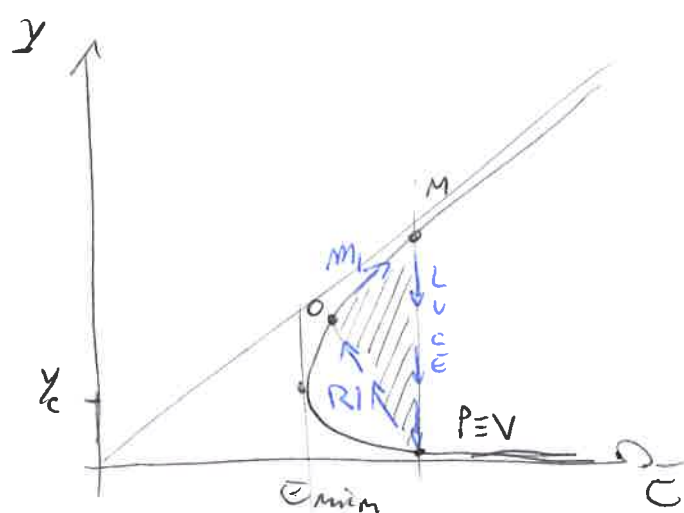
CASO LUCE LIBERA

$$S_M > S_V$$



CASO LUCE RIGURGITATA

$$S_V > S_M \quad (V \rightarrow P)$$



Per luce rigurgitata $S_0 = S_v \Rightarrow \frac{1}{2} \gamma b y_0^2 + \rho \frac{Q^2}{b y_0} = \frac{1}{2} \gamma b y_v^2 + \rho \frac{Q^2}{b y_v}$

$\hookrightarrow C_{q_{LR}} < C_{q_{LL}} \Rightarrow C_{q_{LR}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{y_0}{y_n}}{3 + \left(\frac{ce}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{ce}{y_n}\right)^2}} \cdot C$

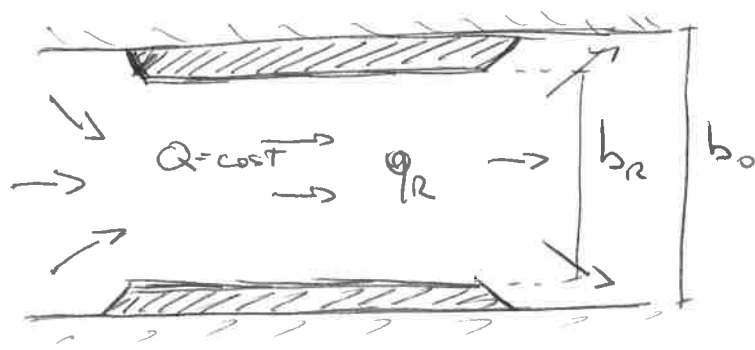
• Valutazione del LIMITE

$\frac{y_0}{ce} = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_v^2} \right] \rightarrow Fr_v^2 = \frac{Q^2}{g b^2 (ce)^3}$

$y_0 \text{ LIMITE} \Rightarrow \begin{cases} y_0 < y_{0 \text{ LIM.}} & \text{luce libera } S_0 < S_v \\ y_0 > y_{0 \text{ LIM.}} & \text{luce rigurgitata } S_0 = S_v \end{cases}$

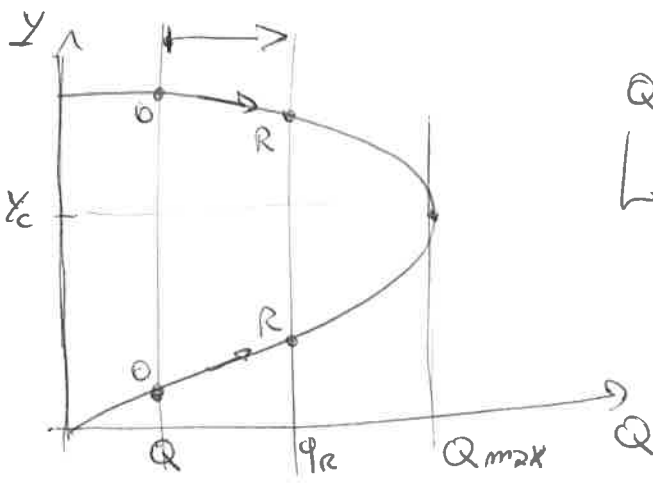
• Il coefficiente di efflusso $C \rightarrow 0,61$, aumenta con il rapporto $\frac{y_n}{e}$ e con l'inclinazione della paratoia θ .

+ **RESTRINGIMENTO** della SEZIONE BRUSCO $b_R < b_0$



$Q \rightarrow q_R$ portata nella sezione contratta
 $q_R = \frac{b_R Q}{b_0}$

ipotesi $E = \text{cost}$
 $y + \frac{Q^2}{2g b^2 y^2} = y_n + \frac{q_R^2}{2g b_R^2 y_R^2}$

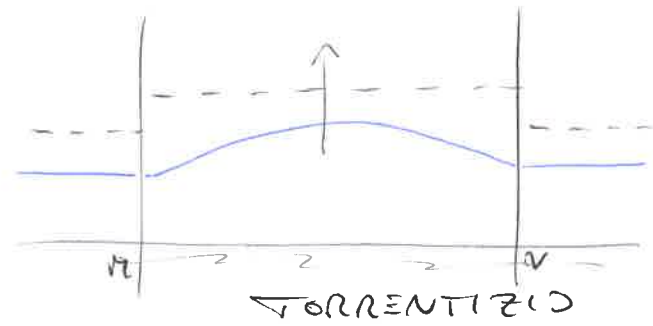
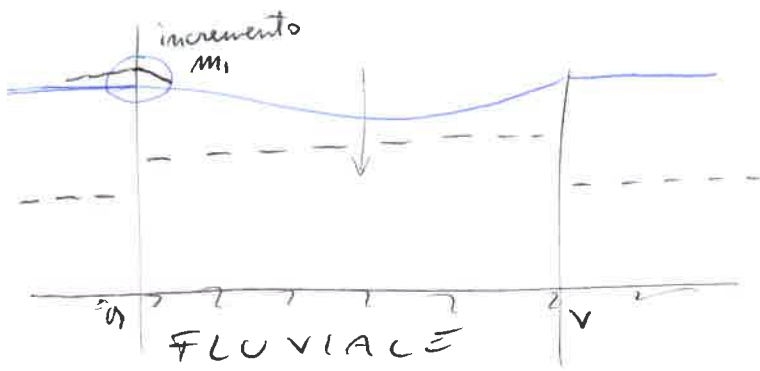


$Q_{max} = y_c \sqrt{3 y_c}$, con $y_c = \frac{2}{3} E$

\hookrightarrow Valutazione del moto indisturbato con portate Q .

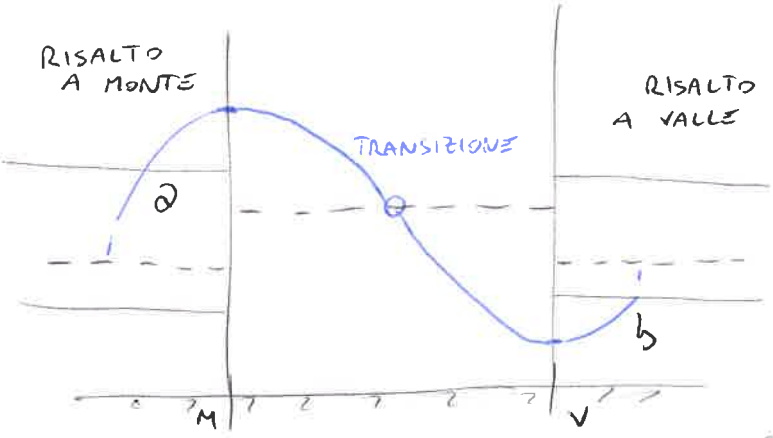
Ipotesi: $q_R < Q_{max}$ NO TRANSIZIONE

corr. lenta \rightarrow profilo scende
 corr. veloce \rightarrow profilo sale



II ipotesi: $q_R > Q_{max}$ TRANSIZIONE

A monte sempre lenta, e valle sempre veloce



Passaggio in critica nel restringimento

$$y_c = y_R = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b_R^2 g}}$$

↳ condizione al contorno interna

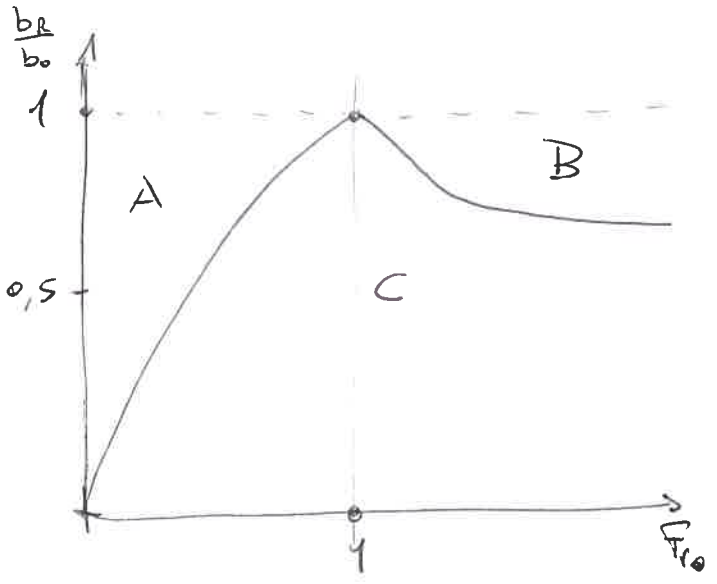
- a. risalto a monte per alveo torrentizio
- b. risalto a valle per alveo fluviale

Forma adimensionale
EQUAZIONE del
RESTRINGIMENTO

$$1 + \frac{1}{2} Fr_0^2 - \frac{3}{2} \left(Fr_0 \frac{b_0}{b_R} \right)^{2/3} = 0$$

• Grafico di Merchi •

parametri $Fr_0 / \frac{b_R}{b_0}$



- A → corrente lenta $Fr < 1$
- B → corrente veloce $Fr > 1$
- C → Transizione

Ogni b_R/b_0 ha due valori di Fr_0 lento e veloce, limiti di altezze a monte e valle

~~$$y_M = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b_0^2 g (Fr_1)^2}}$$~~

$$y_M = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b_0^2 g (Fr_1)^2}}$$

$$y_V = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b_0^2 g (Fr_2)^2}}$$

23

+ GRADINO $\left\{ \begin{array}{l} \text{SALTO in salite} \\ \text{SALTO in discesa} \end{array} \right.$ $\Delta H = \text{cost}$

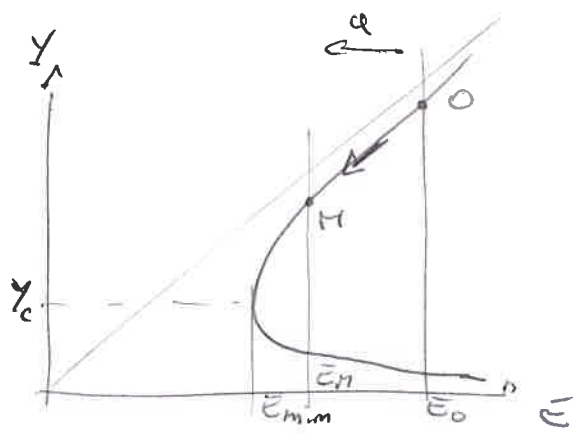
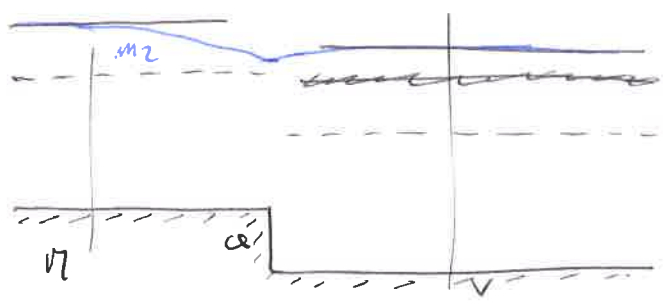
Brusca variazione del fondo di altezza "a"; altezza critica resta la stessa, ma si abbassa di "a".

CONDIZIONI NOTE $\left\{ \begin{array}{l} \text{c. veloce da monte: } E_M \\ \text{c. lenta da valle: } E_V \end{array} \right.$

• FUNZIONAMENTO A SOGLIA BASSA ($Q < Q_{lim}$)

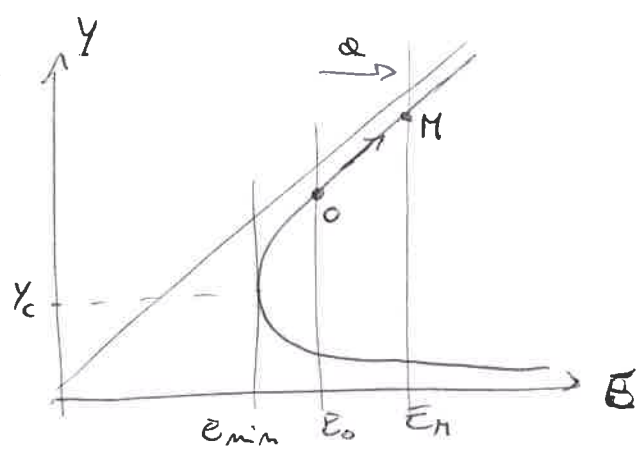
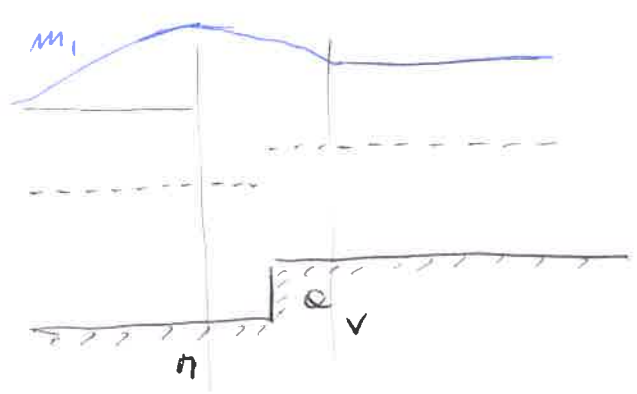
Alveo fluviale in discesa

$E_M = E_V - a$



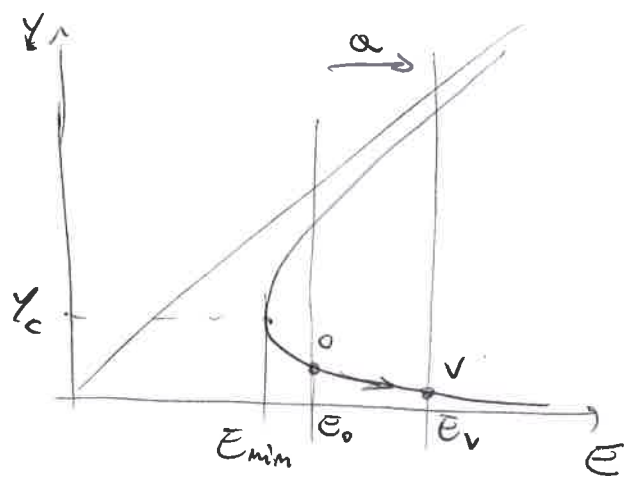
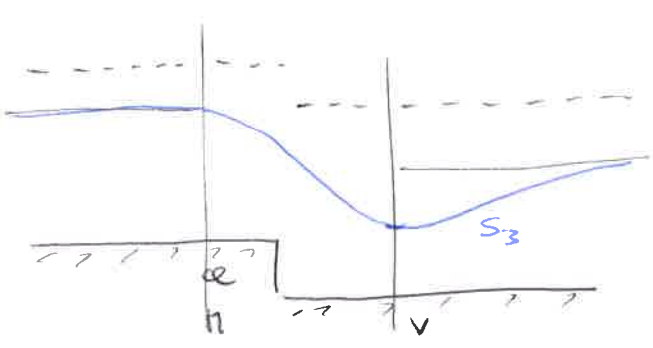
Alveo fluviale in salite

$E_M = E_V + a$

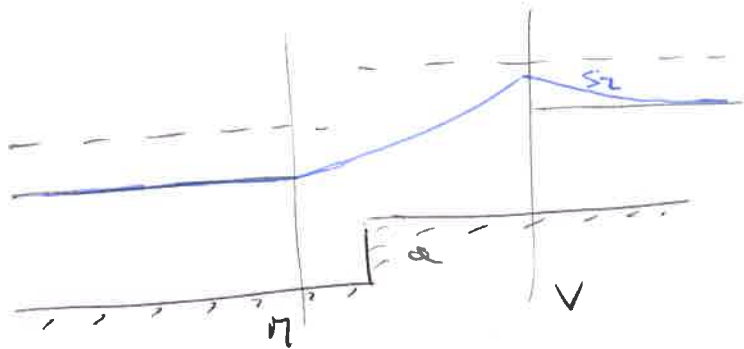


Alveo torrentizio in discesa

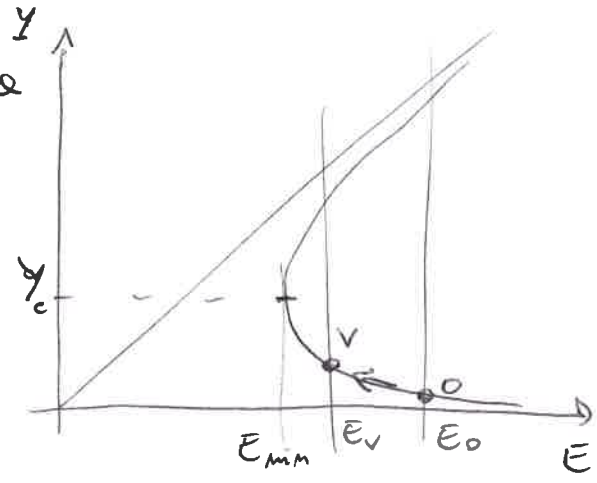
$E_V = E_M + a$



Alveo torrentizio in salita

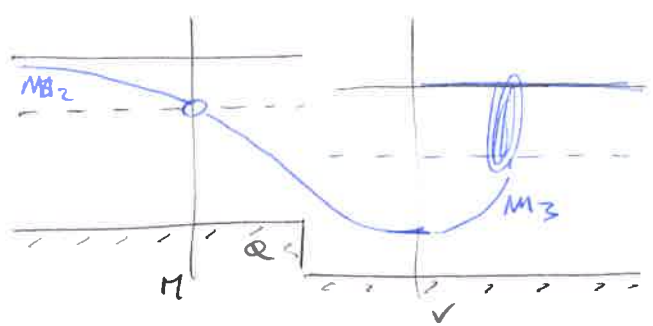


$$\bar{E}_v = \bar{E}_H + Q$$



• FUNZIONAMENTO A SOGLIA ALTA
 ↳ Risultato idraulico

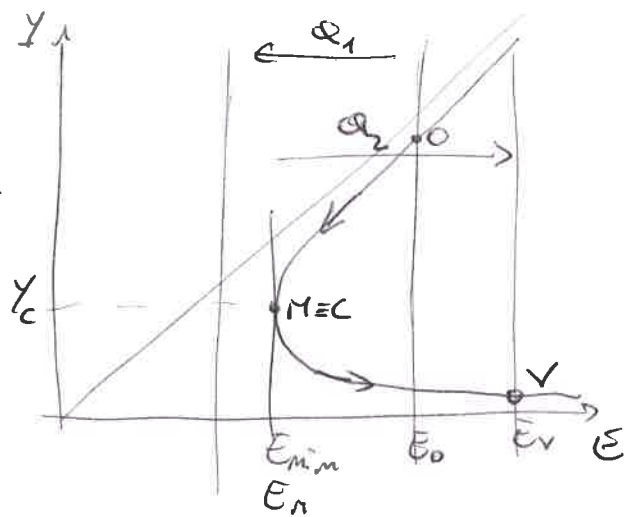
Alveo fluviale in discesa



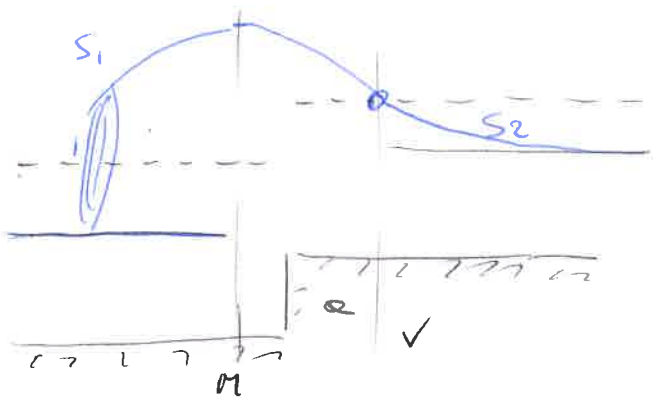
$$Y_H = Y_c$$

$$\bar{E}_v = \bar{E}_H + Q$$

($Q > Q_{lim}$)

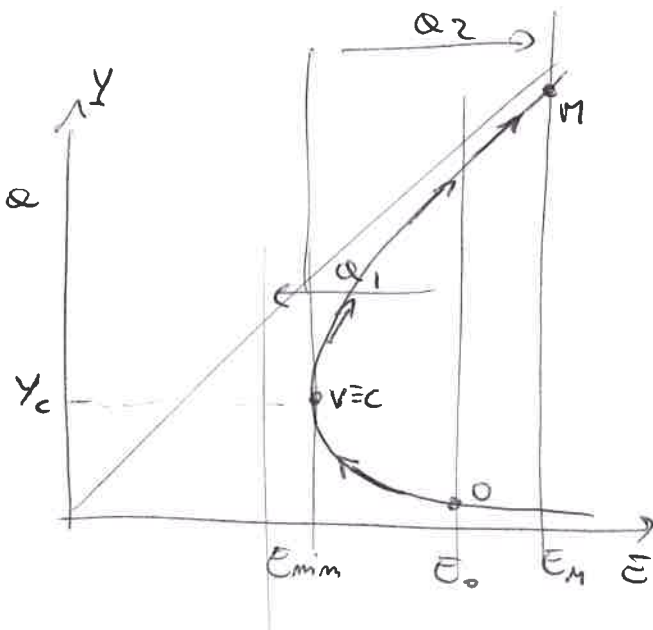


Alveo torrentizio in salita



$$Y_v = Y_c$$

$$E_H = E_v + Q$$



IPOTESI di VARIAZIONE
della PORTATA

→ Modifica delle condizioni
al contorno $Q \neq \text{cost}$ e
Eulerci

q_e afflusso laterale (positivo) → indipendente dal corso
 q_v deflusso laterale (negativo) → dipende dal corso

• EQUAZIONE
di
CONTINUITA'

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_e - q_v$$

• EQUAZIONE
della
QUANTITA' di
MOTO

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g \Omega j + q_v U_{vx} - q_e U_{ex} = 0$$

→ Modifica dei termini

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{x+dx} + q_v dx - Q_x - q_e dx}{dx} \\ \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} = \frac{(U^2 \Omega)_{x+dx} + q_v U_{vx} dx - (U^2 \Omega)_x - q_e U_{ex} dx}{dx} \end{array} \right.$$

ipotesi sulle
velocità

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{vx} = U \text{ velocità di uscita} \rightarrow U \\ U_{ex} = 0 \text{ velocità di ingresso nulla} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 \Omega)}{\partial x} + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g \Omega j + q_v U = 0$$

⇒ l'ingresso si pone a spinta nulla, non interviene nel bilancio energetico; l'uscita fa perdere una parte della spinta.

• EQUAZIONI
dei
PROFILI
($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\frac{Fr^2}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - j - \frac{U}{g \Omega} (2q_e - q_v)}{1 - Fr^2} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4 - j - \frac{U}{g \Omega} (2q_e - q_v)}{1 - Fr^2} \end{array} \right.$$

↳ effetto $\frac{dy}{dx}$

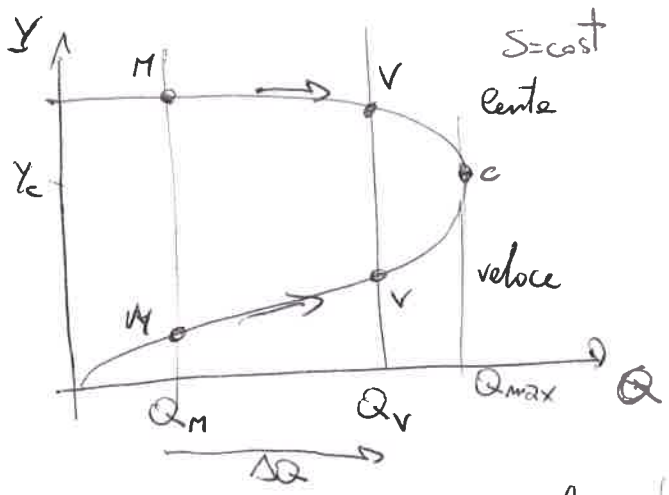
$\left\{ \begin{array}{l} \text{efflusso} < \\ \text{deflusso} < \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{lento} \\ \text{veloce} \end{array} \right.$	$\frac{dy}{dx} < 0$	si abbassa
		$\frac{dy}{dx} > 0$	si alza
	$\left\{ \begin{array}{l} \text{lento} \\ \text{veloce} \end{array} \right.$	$\frac{dy}{dx} > 0$	si alza
		$\frac{dy}{dx} < 0$	si abbassa

Stato critico dell'afflusso; problema di portata incognita del deflusso.

→ ipotesi di fenomeno senza attrito e gravità, essendo concentrato.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{v}{gR} (2qe - q_0)}{1 - Fr^2}$$

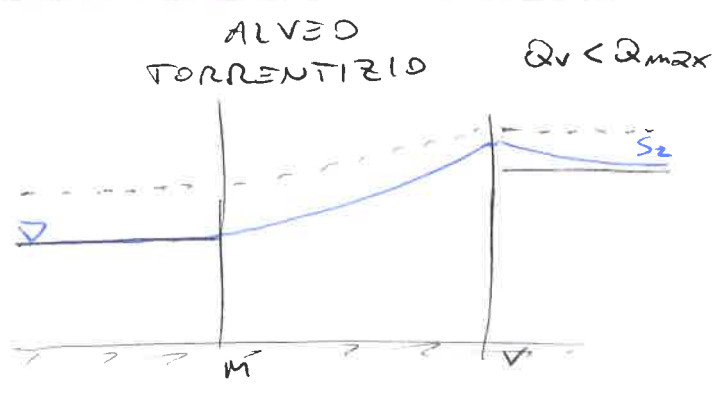
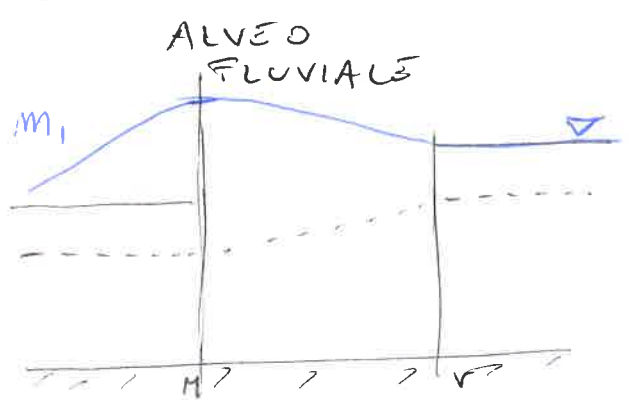
+ Studio dell'AFFLUSSO (q_e): $v_{ex}=0, S=cost$
 Da monte a valle si ha aumento della portata ($Q_v > Q_m$), quindi diminuisce l'energia e la corrente reagisce per bilanciare.



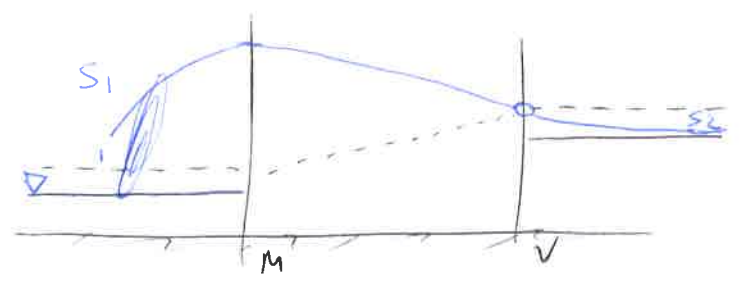
In corrente lenta nota valle
 $Q_m = Q_v - \Delta Q$
 In corrente veloce nota monte
 $Q_v = Q_m + \Delta Q$
 → Δ Verifica stato critico
 $Q_v \geq Q_{max}$

Relazione adimensionale con lo stato di riferimento (y_R, Fr_R^2)

$$\left(\frac{y}{y_R}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_R}\right) \left[1 + 2Fr_R^2\right] + 2Fr_R^2 \left(\frac{Q}{Q_R}\right)^2 = 0$$



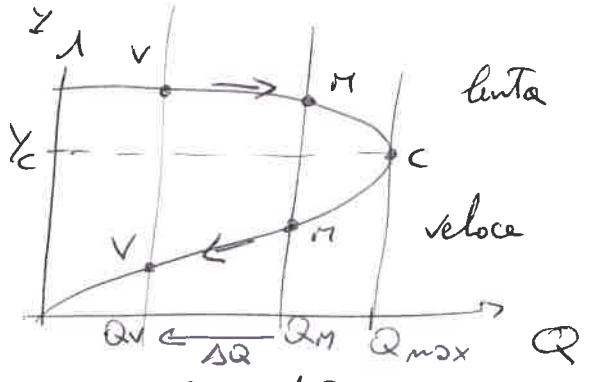
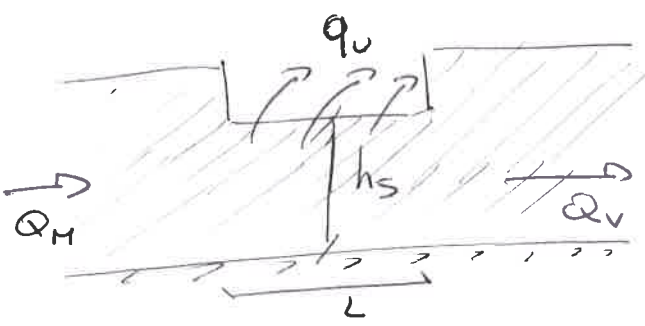
Stato di crisi dell'alveo torrentizio
 $Q_v > Q_{max}$ con Risalto a monte per passaggio in critica a valle



31 + studio del DEFLUSSO (90): $U_{0x} = U, E = \text{cost}$

Da monte a valle la portata si riduce ($Q_v < Q_m$), l'acqua che esce dipende dal corso idrico.

Sistema del fenomeno $\left\{ \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -q_v \\ q_v &= C_q \sqrt{2g} (Y - h_s)^3 \end{aligned} \right.$ deflusso da sfiatore laterale



In corrente lenta nota valle $Q_M = Q_v + \Delta Q$

↳ Verifica passaggio in critica $Q_M \geq Q_{max}$

In corrente veloce nota monte $Q_v = Q_M - \Delta Q$

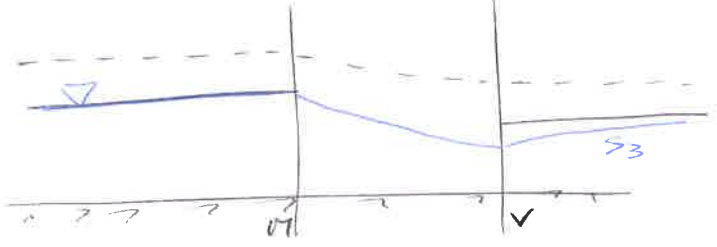
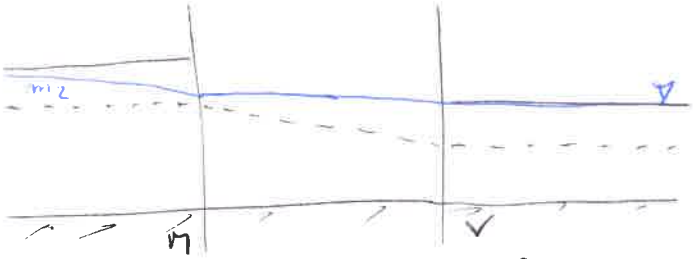
⚠ ΔQ dipende dalle condizioni di monte del corso d'acqua: se $Y \leq h_s$ allora $\Delta Q = 0!$

Relazione adimensionale con lo stato di riferimento (Y_r, Fr_r^2)

$$\left(\frac{Y}{Y_r} \right)^3 - \left(1 + \frac{Fr_r^2}{2} \right) \left(\frac{Y}{Y_r} \right)^2 + \frac{Fr_r^2}{2} \left(\frac{Q}{Q_r} \right)^2 = 0$$

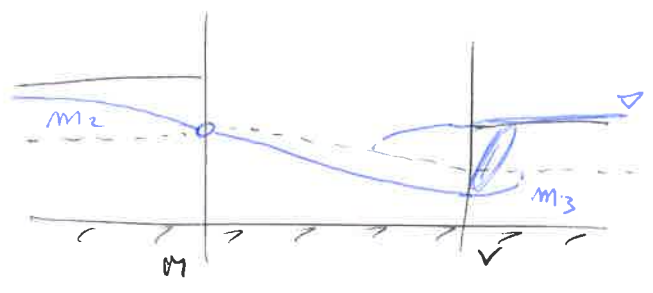
ALVEO FLUVIALE

ALVEO TORRENTIZIO



Stato di crisi dell'alveo fluviale $Q_m > Q_{max}$ con

Risalto verso valle per passaggio in critica a monte



Il problema dell'alveo fluviale è che ΔQ dipende dal corso, ma il profilo del corso dipende dalle condizioni di valle; queste relative al deflusso nello sfioratore ΔQ .

• PROGETTO dello SFIORATORE

moti: Q_m per idrologia, ΔQ di progetto richiesto, $Q_v = Q_m - \Delta Q$.

obiettivo: progettare la geometria (L, h_s).

Lo ipotesi di corrente lenta senza risalto.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -C_q \sqrt{2g} (Y - h_s)^3 && \text{stato di riferimento di valle } Y_0 \rightarrow Y_v \\ \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^3 - \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 \left(1 + \frac{Fr_0^2}{2}\right) + \frac{Fr_0^2}{2} \left(\frac{Q}{Q_v}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

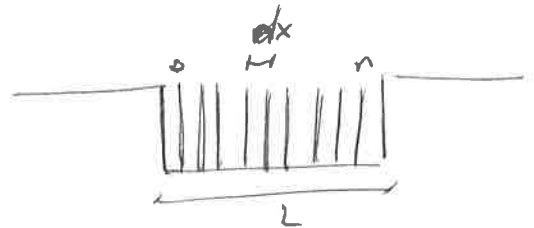
ipotesi di profondità costante $Y_m \approx Y_v$

$$L = \frac{\Delta Q}{C_q \sqrt{2g} (Y_0 - h_s)^3} \quad \text{lunghezza di primo tentativo}$$

Dividendo lo sfioro in n strisce:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta Q_n &= C_q \sqrt{2g} (Y_{n-1} - h_s)^3 dx \\ Q_n &= Q_{n-1} + \Delta Q \end{aligned} \right.$$

$\rightarrow L = dx \cdot n$ per iterazione



• VERIFICA dello SFIORATORE

moti: Q_m per idrologia, geometria (L, h_s).

obiettivo: conoscere ΔQ uscente e Q_v di conseguenza.

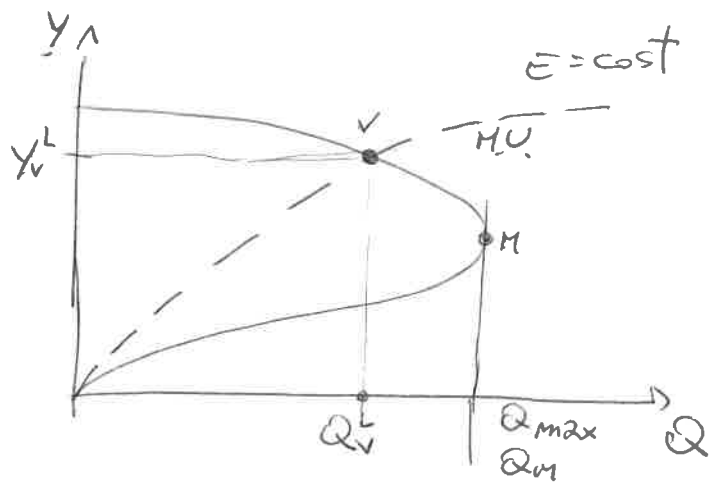
corr. veloce \rightarrow studio da monte $Q_v = Q_m - \Delta Q$
 corr. lenta \rightarrow studio da valle

La Velutere ΔQ $\left\{ \begin{aligned} &\text{grande con risalto} \\ &\text{piccolo senza risalto} \end{aligned} \right.$

dell'energia nota $E = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q_m^2}{g b^2}}$ costante per deflusso.

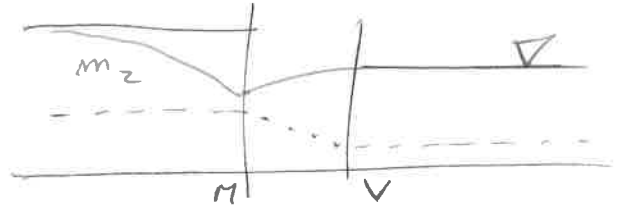
$$\left\{ \begin{aligned} Y_v &= f(Q_v) \\ Y_v + \frac{Q_v^2}{2g b^2 Y_v} &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q_m^2}{g b^2}} \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{ottengo i limiti di portata e profondità}$$

Il sistema è rappresentato graficamente in energia costante, con MU di corrente lenta



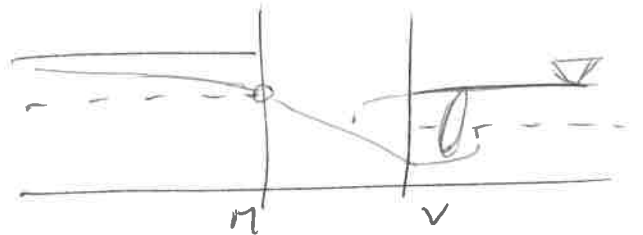
a. per ΔQ piccolo $Q_v > Q_v^L$
sistema poco perturbato

$\hookrightarrow E$ maggiore della portata ~~minima~~ limite



b. per ΔQ grande $Q_v < Q_v^L$
sistema molto perturbato

$\hookrightarrow E$ minore della portata limite



- DISTINZIONE CASI

\hookrightarrow ipotizzando corrente lenta a monte, si ottiene Q_M^L sottostima =

$$\text{To } Q_M > Q_M^L \rightarrow E_{\text{reale}} > E_{\text{min}}$$

\hookrightarrow ipotizzando corrente veloce a valle a monte, si ottiene Q_M^L sovra =

$$\text{stimato } Q_M < Q_M^L \rightarrow E_{\text{reale}} < E_{\text{min}}$$

- CALCOLO

Nella sottostima c'è l'iterazione dei punti degli stati monte e valle.

Nella sovrastima è nota la condizione di monte, quindi valle è $Q_v = Q_M - \Delta Q$.

- RISALTO

confronto delle spinte monte e valle per localizzare il risalto

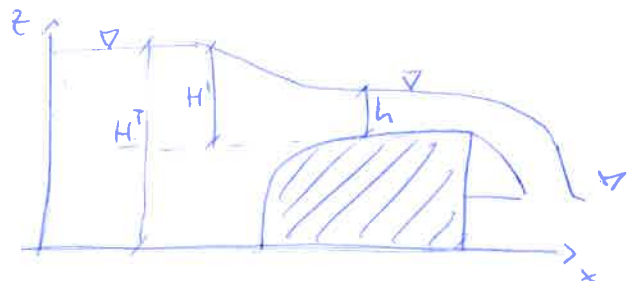
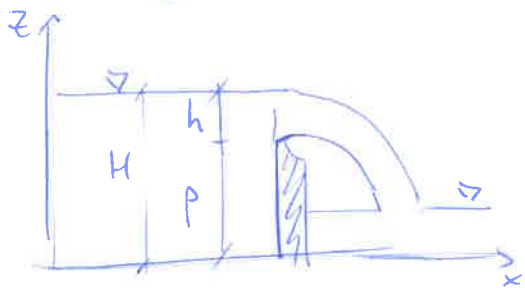
$S_v > S_M$ risalto a monte \rightarrow nello sfioratore!

$S_v < S_M$ risalto a valle

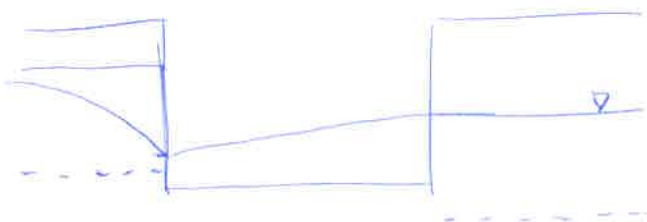
Si dice STREMAZZO un'apertura in uno sbarramento di un flusso liquido, che permette il passaggio del liquido a pressione atmosferica. Cioè un sormonto di un ostacolo di una corrente liquida. Si distinguono quelli in parete ~~sottile~~ ~~grossa~~ e in parete sottile. I primi sono realizzati in CLS, la vena liquida sormonta la soglia ed aderisce al paramento verticale. I secondi sono installati ove si voglia una misura più precisa del deflusso, la vena liquida si distacca dalla soglia ed il deflusso avviene a pressione atmosferica.

Portata: $Q = \frac{2}{3} C_v C_c \sqrt{2gh} \cdot hL \approx 0,4 hL \sqrt{2gh}$

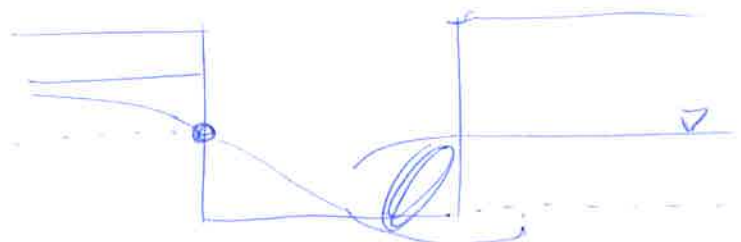
con $\begin{cases} C_v = \text{coeff. contrazione per velocità} = 0,98 \\ C_c = \text{coeff. contrazione per sezione} = 0,61 \end{cases}$



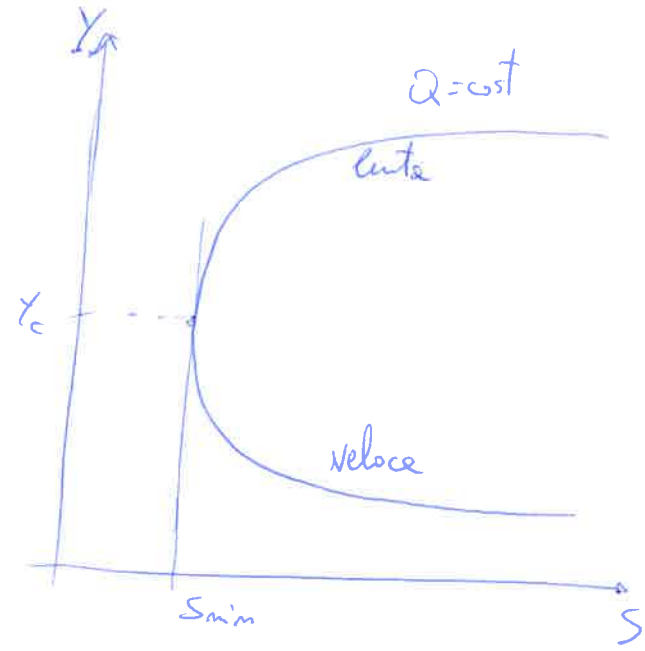
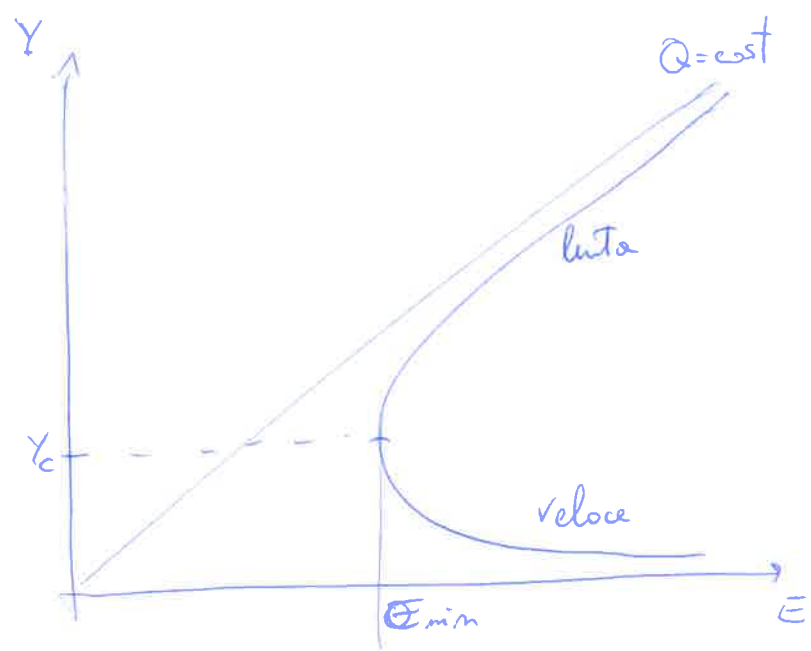
La diminuzione laterale di portata causata di stremazzo provoca una variazione di profondità del moto: a seconda che il flusso nella sezione di monte abbia caratteristiche di corrente lenta o veloce, il profilo sarà rispettivamente crescente o decrescente.



corrente
lenta
FLUVIALE



corrente
veloce (casi)
FLUVIALE



$LUCE <$ libera $S_m > S_v$ moto ind. veloce o lento $Y_0 \leq Y_c$
 $LUCE <$ rigurgitata $S_m < S_v$ moto ind. lento $Y_0 > Y_c$

RESTRINGIMENTO $\left\{ \begin{array}{l} \text{zona A} \text{ corrente lenta} \\ \text{zona B} \text{ corrente veloce} \\ \text{zona C} \text{ transizione lenta} \rightarrow \text{veloce} \end{array} \right.$

GRADINO $\left\{ \begin{array}{l} \text{soglia alta} \quad \alpha > \alpha_{lim} \left\{ \begin{array}{l} \text{fluviale discesa} \\ \text{fluviale salita} \\ \text{Torrentizio salita} \end{array} \right. \text{ RISALTO} \\ \text{soglia bassa} \quad \alpha < \alpha_{lim} \left\{ \begin{array}{l} \text{fluviale discesa} \\ \text{fluviale salita} \\ \text{Torrentizio discesa} \\ \text{Torrentizio salita} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Variazione Portate $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_e - q_u \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (V^2 R)}{\partial x} + g R \frac{\partial h}{\partial x} + g R j + q_u V = 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{AFFLUSSO} \quad S = \text{cost} < \begin{array}{l} \text{Torrentizio} \rightarrow \text{crisi} \\ \text{fluviale} \end{array} \\ \text{DEFUSSO} \quad E = \text{cost} < \begin{array}{l} \text{Torrentizio} \\ \text{fluviale} \rightarrow \text{crisi} \end{array} \end{array} \right.$

Nuova ipotesi di NON CILINDRICITÀ

Matematicamente variazione della sezione e della pendenza

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \neq 0 \text{ e } i_f = i_f(x).$$

→ Variazione delle larghezze $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = y \frac{\partial b}{\partial x}$ distribuito lungo l'asse \hat{x} , non è fenomeno localizzato.

Dato che $Fr^2 = \frac{Q^2}{b^3 g y^3}$, larghezza e natura (Fr) sono inversamente

proporzionali.

RESTRINGIMENTO $\frac{db}{dx} < 0$	$Fr_M < Fr_v$ più torrentizio	FLUVIALE → crisi TORRENTIZIO → più veloce	$\frac{dy}{dx} < 0$ $\frac{dy}{dx} > 0$
ALLARGAMENTO $\frac{db}{dx} > 0$	$Fr_M > Fr_v$ più fluviale	FLUVIALE → più lento TORRENTIZIO → più veloce crisi	$\frac{dy}{dx} > 0$ $\frac{dy}{dx} < 0$

La variazione della critica è più rapida rispetto all'uniforme: in restringimento fluviale le linee si avvicinano (come in allargamento torrentizio), in allargamento fluviale le linee si allontanano (come in restringimento torrentizio).

L'equazione del profilo è
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{Fr^2}{b} y \frac{db}{dx} + i_f - j}{1 - Fr^2}$$

Il caso $j = i_f$ non è asintotico, ma esiste in equilibrio con i due fenomeni. Quindi si attraversa la linea di moto uniforme per $j = i_f$

$$\left. \begin{array}{l} \cancel{j} > i_f \Rightarrow \text{sotto MU} \\ j < i_f \Rightarrow \text{sopra MU} \end{array} \right\}$$

Trasformazione del rapporto di Froude in termini adimensionali

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{b^3 g y^3} \Rightarrow 2 Fr \frac{dFr}{dx} = \frac{Q^2}{g} \left[-\frac{2}{b^3 y^3} \frac{db}{dx} - \frac{3}{y^4 b^3} \frac{dy}{dx} \right]$$

3G

$$\frac{dFr}{dx} = - \frac{Fr}{2} \left[- \frac{2}{b} \frac{db}{dx} - \frac{3}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx} \right]$$

equazione del profilo

$$\frac{dFr}{dx} = - \frac{Fr}{2} \left[\frac{2}{b} \frac{db}{dx} + \frac{3}{\gamma} \frac{\frac{Fr}{b} \gamma \frac{db}{dx} + i\gamma - j}{1 - Fr^2} \right]$$

$$\frac{dFr}{dx} = - \frac{Fr}{2(1 - Fr^2)} \left[\frac{1}{b} \frac{db}{dx} (2 + Fr^2) + \frac{3}{\gamma} (i\gamma - j) \right]$$

Relazione Adimensionale (Fr - \gamma)

effetto di NON CILINDRICITÀ

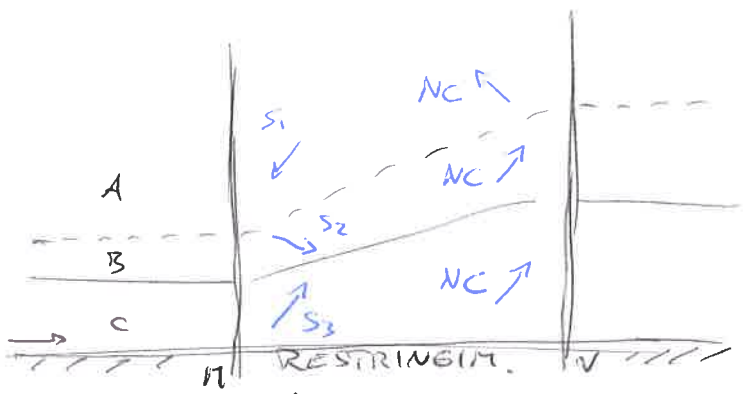
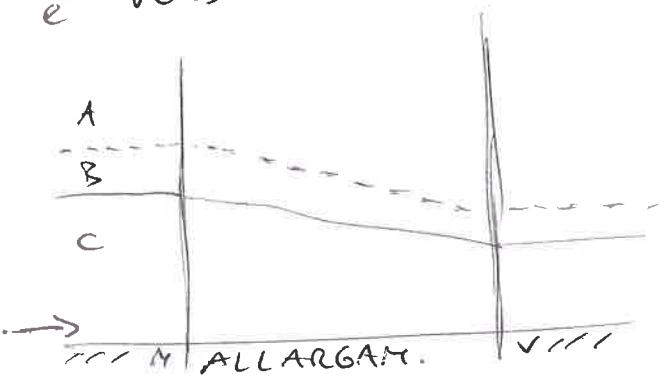
effetto cilindrico

Infatti se $j = i\gamma$ (moto uniforme), solo effetto non-cilindrico.

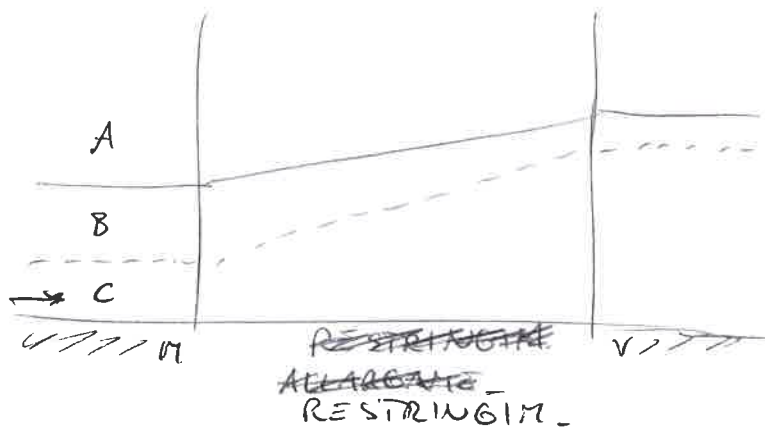
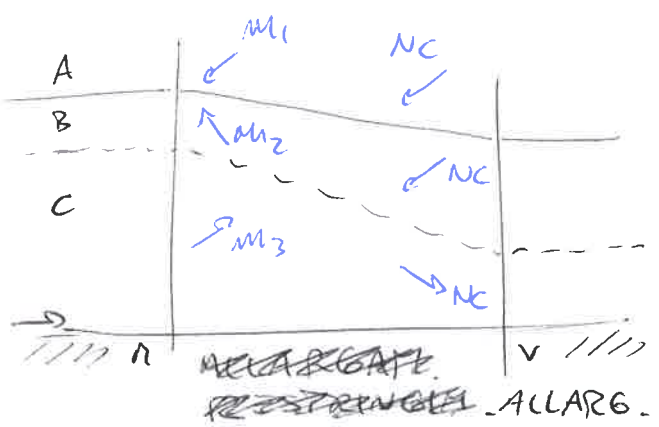
$$\frac{dFr}{dx} = - \frac{Fr}{2(1 - Fr^2)} \left[\frac{1}{b} \frac{db}{dx} (2 + Fr^2) \right]$$

⇒ Uguaglianza degli effetti: $Fr = \text{cost.}$

la corrente VELOCE: in allargamento il profilo scende ma è più veloce, in restringimento il profilo sale ma è verso la critica.



la corrente LENTA: in allargamento il profilo sale ma è più lenta, in restringimento il profilo scende ma è verso la critica.



Verifica dell'effetto dominante in base all'intensità della variazione $\rightarrow \left(\frac{db}{dx}\right)_{\text{limite}} \left\{ \begin{array}{l} \text{debole } (m_1 \text{ o } s_3) \\ \text{forte} \\ \text{molto forte} \end{array} \right\} \text{CRITICA con Risalto}$

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dx} (2 - Fr^2) \geq -\frac{3}{y} (if - j)$$

Valore limite con la condizione di stato critico

$$\left\{ \begin{array}{l} Fr = 1 \\ y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad j = \frac{Q^2}{K_s^2 b^2 y_c^{10/3}}$$

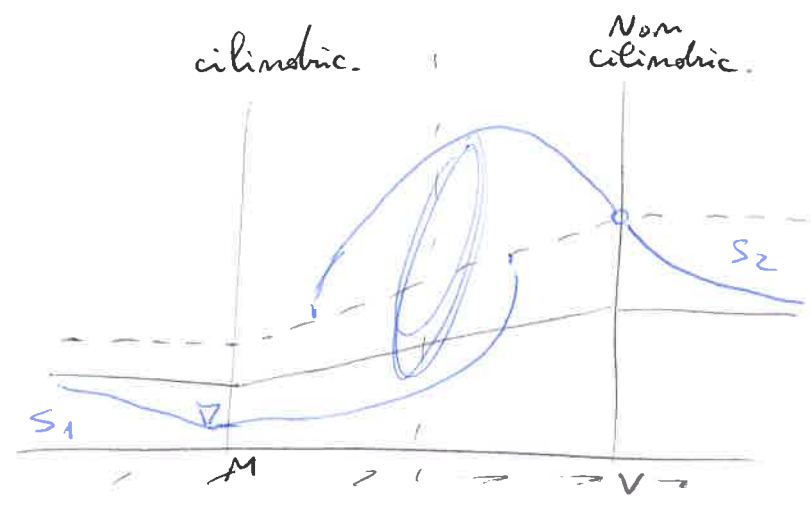
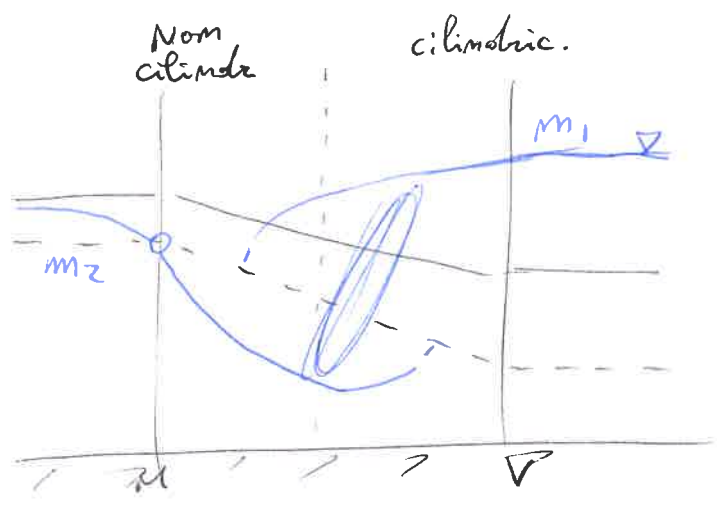
$$\frac{db}{dx} \geq \frac{b^{5/3} S^{1/3}}{Q^{2/3}} \left[\frac{b^{2/3} S^{10/3}}{K_s^2 Q^{2/3}} - if \right] \quad \text{se} \left\{ \begin{array}{l} > \text{cilindricità} \\ < \text{non-cilind.} \end{array} \right.$$

L'ipotesi semplificativa di alveo cilindrico domina in alvei larghi, l'effetto non cilindrico entra in gioco in alvei più stretti (più reali).

\rightarrow Stati di crisi in variazione forte.

Allargamento
Lento

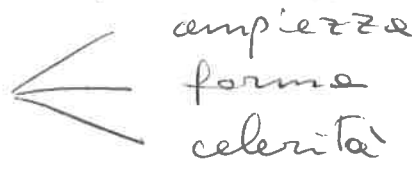
Restringimento
Veloce



35 CORRENTI NON STAZIONARIE

L'onda è il trasporto, o propagazione, di un segnale attraverso un mezzo materiale.

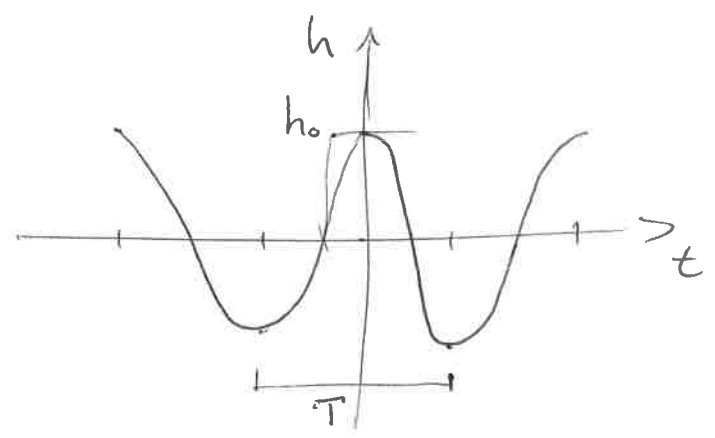
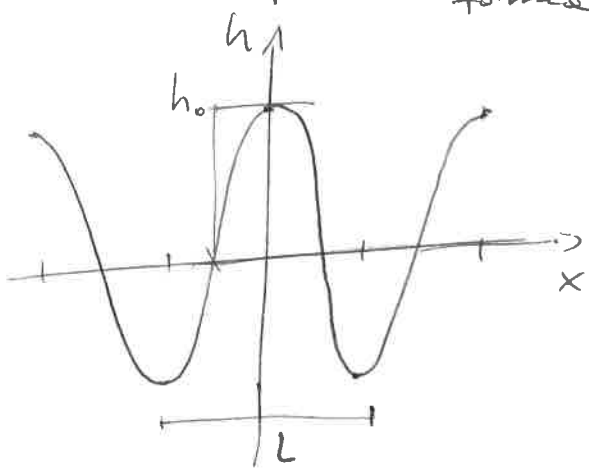
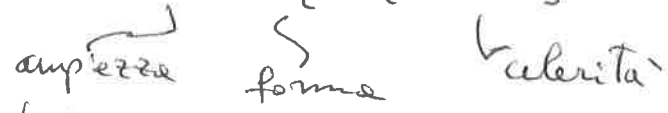
parametri principali



propagazione di ENERGIA e QUANTITÀ DI MOTO

La propagazione è la dipendenza dallo spazio e del tempo.

$$h = h_0 \cos[k(x - ct)]$$



- Ⓛ lunghezza d'onda → periodicità spaziale = $\frac{2\pi}{k}$
- Ⓣ lunghezza d'onda → periodicità temporale = $\frac{2\pi}{kc}$

↳ Ⓢ celerità = $\frac{L}{T}$ • rapporto periodicità

STABILIRE LEGAME c/L oppure c/T , quindi $c = f(k)$ dipende dalla natura delle onde.

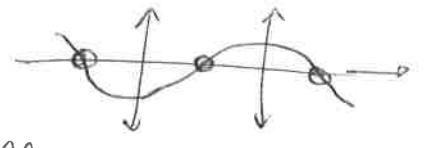
+ onde DISPERSIVE: c dipende da L , di lunghezza diverse tendono a non accumularsi (rarefazione).

+ onde NON DISPERSIVE: c non dipende da L , carattere che porta all'accumulo (shock).

ONDA DI GRAVITA' / classificazione secondo cui si mettono in relazione i caratteri di quota e portata - si propagano grazie all'energia meccanica -

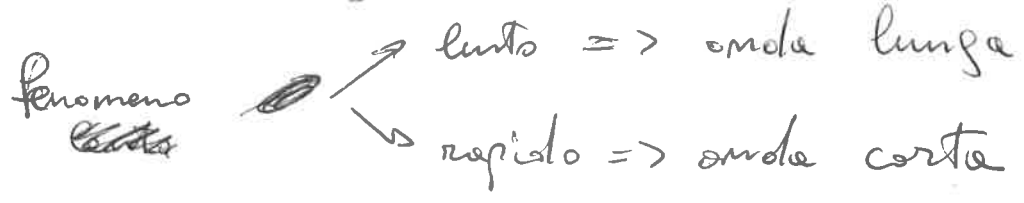
Onde OSCILLATORIE sono la somma di due onde identiche e contrarie ~~tra~~

$$h = h_0 \cos[k(x-ct)] + h_0 \cos[k(x+ct)]$$



→ Il mezzo resta a velocità (v) nulla ma la celerità (c) è la propagazione del segnale -

CLASSIFICAZIONE → per causa generatrice → onde lente/lunga o onde veloci/corte -



ONDA IPERBOLICA

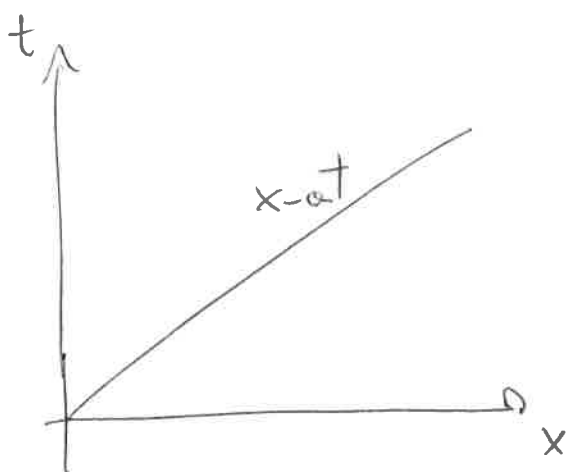
$$\frac{\partial h}{\partial t} + a \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Ⓡ $a = \text{cost}$ soluzione semplice → osservatore fisso

$$\hat{x} = x - ct \Rightarrow h = f(\hat{x})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{df}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{df}{d\hat{x}} (-c) \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{df}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{df}{d\hat{x}} (1) \end{aligned} \right. \Rightarrow a \frac{df}{d\hat{x}} - c \frac{df}{dt} = 0$$

• Relazione di dispersione $a = c$: l'onda non disperde

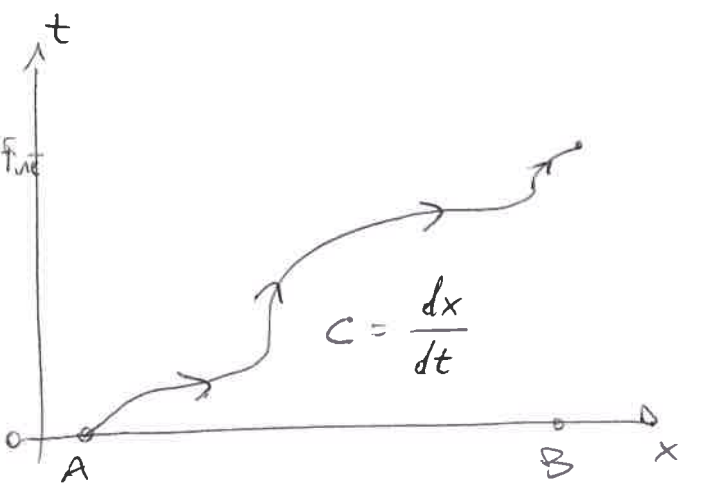


$$h = f(x-at) = f(x-ct)$$

$$c = \frac{x}{t}$$

II $\alpha \neq c$ \rightarrow osservatore mobile

cambia il sistema di riferimento



$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_M = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_M - \frac{\partial h}{\partial x} c$$

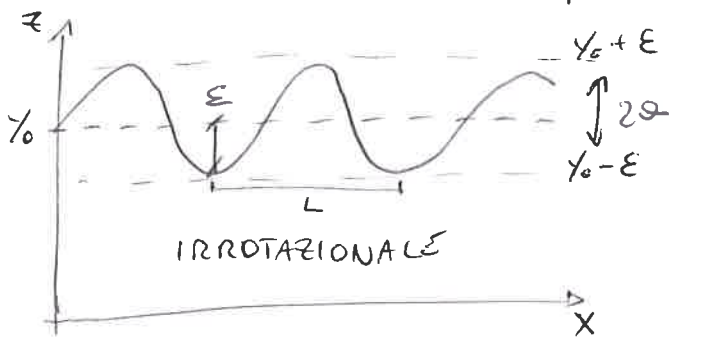
$$0 = \frac{\partial h}{\partial x} \alpha + \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_M - c \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_M + (\alpha - c) \frac{\partial h}{\partial x} = 0}$$

se $c = \alpha \rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_M = 0$ Problema Differenziale Ordinario

ONDA DI MARE

Approssimazione: campo di moto irrotazionale (Stokes)



$$\begin{cases} h = y_0 \pm \epsilon(x, t) \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\nabla \phi = \vec{v}$ rotore del potenziale di velocità

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

campo di moto

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

\Rightarrow Non si considera la viscosità al fondo

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \times \nabla \vec{v} \\ \vec{f} = \nabla G = \nabla (-g \vec{z}) \end{cases}$$

EQUAZIONE di EULERO

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{v}|^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}}$$

Equazione di Bernoulli

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2}{2g} + z - y_0 + \frac{p}{\gamma} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + h = \text{cost} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2}{2g} + h - y_0 = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno
 + superficie $z = \gamma_0 \pm \varepsilon(x, t)$

- cinematica $\frac{dF_s}{dt} = 0$ con $F_s = z - \gamma_0 + \varepsilon = 0$

quindi $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

- dinamica

quindi $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial z})^2}{2g} + \varepsilon = 0$

oscillazione
 superficiale

+ fondo $z = 0$

- cinematica $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ moto irrotazionale

\Rightarrow equazioni non-lineari con 3 incognite (ϕ, p, ε), soluzione non banale.

CLASSIFICAZIONE dimensionale

ampiezza	$\frac{\varepsilon}{\gamma_0}$	$\rightarrow 0$	piccole
		$\rightarrow \infty$	grande
lunghezza	$\frac{\gamma_0}{L}$	$\rightarrow 0$	onde lunghe \equiv acqua bassa
		$\rightarrow \infty$	onde corte \equiv acqua profonda
ripidità	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\rightarrow 0$	poco ripide
		$\rightarrow \infty$	molto ripide

ONDA di MARE assume l'ipotesi di $\frac{\varepsilon}{\gamma_0} \Rightarrow 0$, onde di piccola ampiezza, quindi alta profondità e conseguente irrotazionalità del campo di moto.

\Rightarrow Perturbazione piccola rispetto allo stato iniziale, dispersione nulla perché il fondo non agisce

34
Linearizzazione dell'equazione: ϵ piccole

$$(\epsilon, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots) \gg (\epsilon^2, \phi \epsilon, \frac{\partial \phi}{\partial x} \epsilon \dots)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{eq. di Laplace continuità} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + (z - \gamma_0) = 0 \quad \text{eq. del moto} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{in } z = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{in } z = \gamma_0 + \epsilon \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \epsilon = 0 \quad \text{in } z = \gamma_0 + \epsilon \end{array} \right.$$

sostituzione dei termini ϵ, ϕ con la propagazione $(x-ct)$:

$$\epsilon = a \cos[k(x-ct)]$$

$$\phi = F(z) \cdot \sin[k(x-ct)]$$

Così da studiare la velocità per onde di piccola ampiezza
 $z \rightarrow c$

• eq. di Laplace continuità:

$$-F(z) \cdot k^2 \sin[k(x-ct)] + \frac{d^2 F}{dz^2} \sin[k(x-ct)] = 0$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - F(z) \cdot k^2 = 0 \quad \text{eq. omogenea di II grado (PDO)}$$

$$\left(\text{moto } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \begin{array}{l} \text{trigonometria} \\ \text{iperbolica} \end{array}$$

$$\text{soluzione generale } F = \hat{C}_1 e^{kz} + \hat{C}_2 e^{-kz} = C_1 \cosh(kz) + C_2 \sinh(kz)$$

$$\text{in } z=0, \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{quindi } \frac{dF}{dz} = C_2 k \cosh(0) = 0, \quad C_2 = 0$$

$$\text{Il potenziale di velocità } \phi = C_1 \cosh(kz) \cdot \sin[k(x-ct)]$$

⊙ sulla superficie $z = y_0 + \epsilon$

$$\begin{cases} kc \sin[k(x-ct)] - kc_1 \sinh(ky_0) \sin[k(x-ct)] = 0 \\ -kc c_1 \cosh(ky_0) \cos[k(x-ct)] + g \cos[k(x-ct)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha kc - c_1 (k \sinh(ky_0)) = 0 \\ \alpha g - c_1 (kc \cdot \cosh(ky_0)) = 0 \end{cases}$$

⇒ soluzioni banali $\begin{cases} \alpha = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$ mare fermo = quiete

→ Relazione incognite $c_1 = f(\alpha)$

matrice $\begin{vmatrix} kc & -k \sinh(ky_0) \\ g & -kc \cosh(ky_0) \end{vmatrix} = 0$

combinazione lineare $-k^2 c^2 \cosh(ky_0) + g k \sinh(ky_0) = 0$

quindi $c^2 = \frac{g}{k} \tanh(ky_0)$ CONDIZIONE di ESISTENZA ONDE

con celerità $c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(ky_0)}$

per $k = \frac{2\pi}{L}$ ho $c = \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right)}$

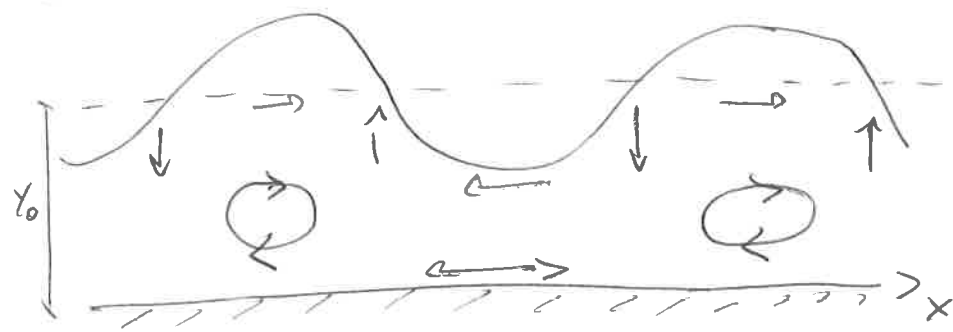
⇒ $c = f(L)$ carattere **DISPERSIVO** → rarefazione

Il campo di velocità per α arbitrario e c noto, in piccola ampiezza è

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\alpha g}{c} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(ky_0)} \cos[k(x-ct)] \\ V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\alpha g}{c} \frac{\sinh(kz)}{\cosh(ky_0)} \sin[k(x-ct)] \end{cases}$$

in $z=0$ $\begin{cases} V_x = \phi \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sinh(kz)}{\cosh(ky_0)} = 0$ controfase della velocità

↳ Particelle fluide con traiettorie ellittiche



\Rightarrow Al fondo si ha oscillazione longitudinale in \hat{x}

La pressione non è idrostatica: P varia, $P=0$ solo in superficie per condizione al contorno.

$$\phi = \frac{ag}{kc} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(ky_0)} \sin[k(x-ct)]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 = \frac{ag}{c} \frac{\sinh(kz)}{\cosh(ky_0)} \sin[k(x-ct)] = 0$$

quindi
$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + (z - y_0) = 0 \rightarrow P = \rho \left((y_0 - z) - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -ag \frac{\cosh(kz)}{\sinh(ky_0)} \cos[k(x-ct)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \rho \left((y_0 - z) + \frac{ag \cosh(kz)}{\sinh(ky_0)} \cos[k(x-ct)] \right)$$

Pressione con variazioni non idrostatica

• CASO ACQUA PROFONDA $\frac{y_0}{L} \rightarrow \infty$

onda corta $\tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right) \rightarrow 1$

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{k}} = \pm \sqrt{\frac{Lg}{2\pi}} \neq f(y_0)$$

onda dispersiva $c = f(L)$

$$\frac{v_x \text{ fondo}}{v_x \text{ superf.}} = \frac{1}{\cosh(ky_0)} \rightarrow 0$$

al fondo non si risente del moto ondoso

• CASO ACQUA BASSA $\frac{y_0}{L} \rightarrow 0$

onda lunga $\tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right) \rightarrow ky_0$

$$c = \pm \sqrt{gy_0} = f(y_0)$$

onda non dispersiva $c \neq f(L)$

$$\frac{v_x}{v_x} = \frac{U}{\sqrt{gy_0}} = \frac{U}{c} \quad (\text{onda iperbolica})$$

$$\frac{v_x \text{ fondo}}{v_x \text{ superf.}} \rightarrow 1$$

al fondo la velocità è la stessa della superficie

L'onda di mare si forma perché il vento spinge lo strato d'acqua superficiale, cui cede parte della sua energia cinetica e quantità di moto, e ne aumenta la velocità rispetto allo strato d'acqua sottostante; per attrito viscoso ogni strato d'acqua con velocità differente tende a trascinare lo strato sottostante più lento e nel contempo a rallentare, quindi le onde sono destinate a dissolversi o dissiparsi in un intervallo di tempo finito.

Il frangimento è assistito dallo shoaling; incontrando un fondale via via più basso parte dell'energia associata all'onda si dissipa per attrito col fondale, la restante tende a conservarsi col risultato che diminuisce la sua velocità, ma cresce in ampiezza.

VELOCITÀ $c = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} \Rightarrow \frac{\text{periodicità spaziale}}{\text{periodicità temporale}} = \frac{L}{T}$

Legame $c = f(k)$ determina DISPERSIONE onda

Sistema di relazione ω & k

$$\begin{cases} \omega k - c_1 (k \sinh(k y_0)) = 0 \\ \omega g - c_1 (k c \cosh(k y_0)) = 0 \end{cases}$$

determinante matrice $\rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(k y_0)} = \pm \sqrt{\frac{L g}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right)}$

ac. profonda $\frac{y_0}{L} \rightarrow \infty$
 $\tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right) \rightarrow 1 \Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{L g}{2\pi}}$

\rightarrow onda DISPERSIVA in funzione di L

* carattere L lunghezza d'onda

acque basse $\frac{y_0}{L} \rightarrow 0$
 $\tanh\left(\frac{2\pi y_0}{L}\right) \rightarrow \frac{2\pi y_0}{L} \Rightarrow c = \pm \sqrt{g y_0}$

\rightarrow onda NON DISPERSIVA in funzione di y_0

* carattere y_0 profondità

LINEARIZZAZIONE ONDA DI MARE

Sistema di equazioni dell'onda di mare

(ipotesi acque profonde $\frac{y_0}{L} \rightarrow \infty$, irrotazionalità del fondo)

$$\begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{continuità} \\ \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{g} + (z - y_0) = 0 \quad \text{moto} \end{array} \right. \\ B \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \\ C \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \xi = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{condizioni} \\ \text{al contorno} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fondo} \\ \rightarrow \text{superficie} \end{array}$$

(ampiezza oscillazione $\xi = a \cdot \cos[\kappa(x - ct)]$)
(potenziale velocità $\phi = F(z) \cdot \sin[\kappa(x - ct)]$)

~~$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (F(z) \sin[\kappa(x - ct)]) = 0$~~

(A) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \kappa \cdot F(z) \cos[\kappa(x - ct)]$
 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\kappa^2 F(z) \sin[\kappa(x - ct)]$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{dF(z)}{dz} \sin[\kappa(x - ct)]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{d^2 F(z)}{dz^2} \sin[\kappa(x - ct)]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{d^2 F(z)}{dz^2} \sin[\kappa(x - ct)] - \kappa^2 F(z) \sin[\kappa(x - ct)]}{\sin[\kappa(x - ct)]} = 0$$

$$\leadsto \frac{d^2 F(z)}{dz^2} - \kappa^2 F(z) = 0$$

$$\Rightarrow \text{trovare } F = C_1 \cosh(\kappa z) + C_2 \sinh(\kappa z)$$

con $C_2 = 0$ $F = C_1 \cosh(\kappa z)$

soluzione
canale PDO

$\Rightarrow z = \gamma$ con $\varepsilon \rightarrow 0$

$\textcircled{D\varepsilon}$

$$F = c_1 \cosh(k\gamma_0)$$

le condizioni in superficie sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{d}{dz} (c_1 \cosh(k\gamma_0)) \cdot \sin[k(x-ct)] = 0 \\ kc \alpha \cdot \sin[k(x-ct)] - kc_1 \sinh(k\gamma_0) \cdot \sin[k(x-ct)] = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (c_1 \cosh(k\gamma_0) \cdot \sin[k(x-ct)]) = 0$$

$$-kc_1 \cosh(k\gamma_0) \cdot \cos[k(x-ct)] + \alpha g \cos[k(x-ct)] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} kc \alpha - kc_1 \sinh(k\gamma_0) = 0 \\ -kc c_1 \cosh(k\gamma_0) + \alpha g = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{cc} kc & -k \sinh(k\gamma_0) \\ g & -kc \cosh(k\gamma_0) \end{array} \right| \Rightarrow \det(-k^2 c^2 \cosh(k\gamma_0) + kg \sinh(k\gamma_0)) = 0$$

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{\sinh(k\gamma_0)}{\cosh(k\gamma_0)} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(k\gamma_0)} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi\gamma_0}{L}\right)}$$

condizione esistenza onde

+ ONDA IPERBOLICA IN CORRENTE

sistema di equazioni della corrente a superficie libera (Q, h)

$$\begin{cases} b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} + \left[g\Omega - \frac{Q^2 b}{\Omega^2} \right] \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + g\Omega j = 0 \end{cases}$$

Forma indiciale $\left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x} + D_i = 0 \right]$ $\left\{ \begin{array}{l} i = \text{eg} \left\langle \begin{array}{l} \text{moto} \\ \text{continuità} \end{array} \right. \\ j = \text{incognite} \left\langle \begin{array}{l} h \\ Q \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} h \\ Q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ g\Omega - \frac{Q^2 b}{\Omega^2} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} Q \\ h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \frac{Q}{\Omega} \end{vmatrix} = 0$$

Per $Q \neq \text{cost}$ osservatore in movimento

↳ linearizzazione $l_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x} + D_i \right] = 0$, con $l = l_1, l_2$

⇒ Trasformazione: $\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + c \frac{\partial f_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{df_i}{dt} - c \frac{\partial f_i}{\partial x}$

quindi $l_i \left[\frac{df_i}{dt} - c \frac{\partial f_i}{\partial x} + B_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x} + D_i \right] = 0$

$$l_i \left[\frac{df_i}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial x} (B_{ij} - c) + D_i \right] = 0$$

$$\hookrightarrow l_1 \left[-c \frac{\partial f_1}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] + l_2 \left[-c \frac{\partial f_2}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial f_2}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] = 0$$

condizioni da soddisfare $\left\{ \begin{array}{l} l_1 [B_{11} - c] + l_2 [B_{12}] = 0, \text{ con } \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ l_1 [B_{12}] + l_2 [B_{22} - c] = 0, \text{ con } \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$

determinante trova la velocità c :

$$c = \frac{2U \pm \sqrt{4U^2 + \frac{4}{b} [g\Omega - U^2 b]}}{2} = \boxed{U \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}}}$$

soluzioni invariabilmente iperboliche
↳ Traiettorie in spazio e tempo

ipotesi $l_2 = \phi$ e $c = U \pm \sqrt{g \frac{R}{b}} = c^\pm$

quindi $l_1 = \frac{1}{B_{12}} l_2 [c - B_{22}] = b [U \pm \sqrt{g \frac{R}{b}} - 2U]$

$$\begin{cases} l_1 = b [c^+ - 2U] \\ l_2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} l_1 = b [c^- - 2U] \\ l_2 = 1 \end{cases} \quad \text{2 coppie di soluzioni possibili}$$

EQUAZIONE DEL MOTO in forma caratteristica:

$$b [c^\pm - 2U] \frac{dh}{dt} + \frac{dQ}{dt} - \frac{Q^2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_h + g R j = 0$$

Le traiettorie dipendono dalla natura dell'alveo in base al numero di Froude.

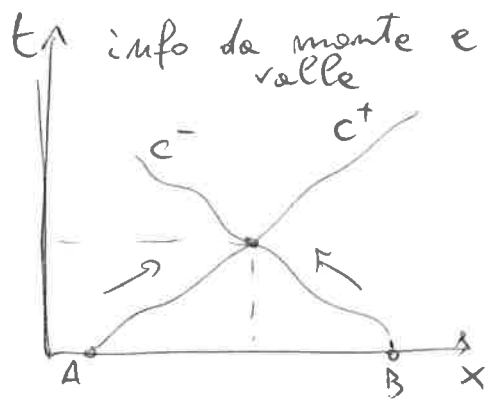
$$c = U \left(1 \pm \frac{1}{Fr} \right)$$

fluviali $Fr < 1$
alvei

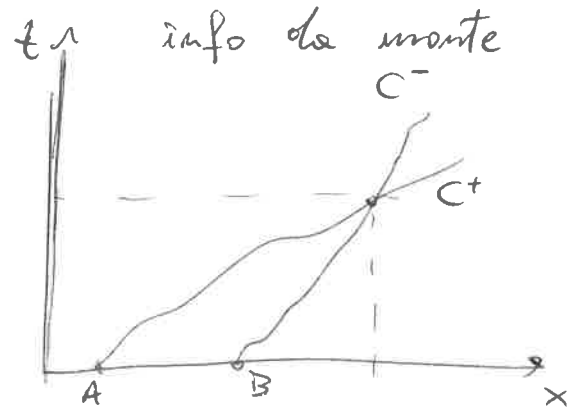
$$c^+ < 0, c^- < 0$$

torrentizi $Fr > 1$

$$c^+ > 0, c^- > 0$$



A. FLUVIALE



A. TORRENTIZIO

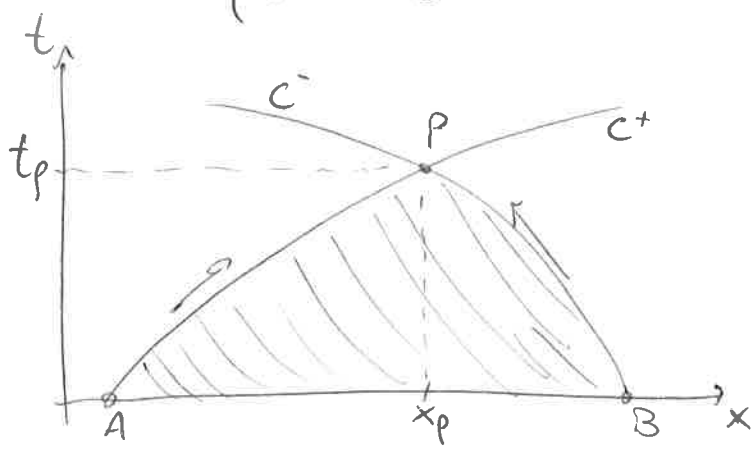
$\rightarrow Fr = \frac{U}{\sqrt{g Y_m}}$ rapporto tra velocità e celerità di propagazione approssimate

\Rightarrow Si ottiene un problema di Cauchy con 2 equazioni, condizioni iniziali ed unica soluzione in tempo e spazio.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c^\pm = U \pm \sqrt{g Y} \\ \frac{d}{dt} [U \pm 2\sqrt{g Y}] + g (j - i) = 0 \end{cases} \quad \text{con } j = i f$$

$U \pm 2\sqrt{g Y} = \text{costante}$

per c^+ $\begin{cases} c^+ = U + \sqrt{gY} \\ U + 2\sqrt{gY} = \text{cost} \end{cases}$; per c^- $\begin{cases} c^- = U - \sqrt{gY} \\ U - 2\sqrt{gY} = \text{cost} \end{cases}$



informazioni del punto $P(x_p, t_p)$ con le variabili $\begin{cases} Y \text{ profondità} \\ U \text{ velocità} \end{cases}$

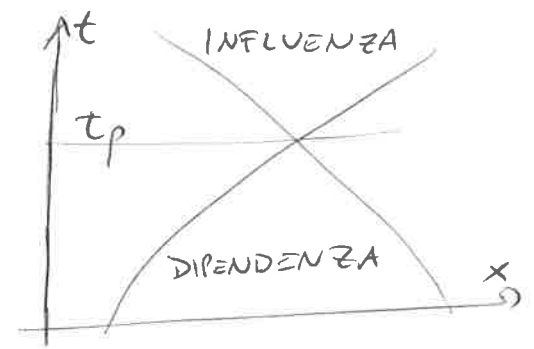
A) $\begin{cases} U_p + 2\sqrt{gY_p} = U_A + 2\sqrt{gY_A} \\ U_p - 2\sqrt{gY_p} = U_B - 2\sqrt{gY_B} \end{cases}$

punto di intersezione $(x_p, t_p) \rightarrow$ incontro di rette

$\begin{cases} \frac{x_p - x_A}{t_p - t_A} = U_A + 2\sqrt{gY_A} \\ \frac{x_p - x_B}{t_p - t_B} = U_B - 2\sqrt{gY_B} \end{cases}$

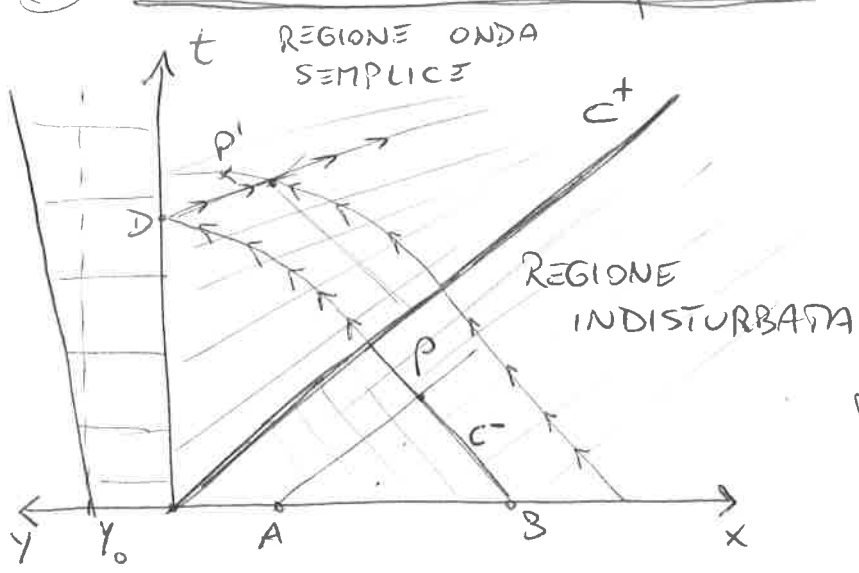
L'area sottesa da curve APB dà informazioni per il punto P .

\rightarrow DOMINIO $\begin{cases} \text{dipendenza } t < t_p \\ \text{influenza } t > t_p \end{cases}$



Fenomeno propagatorio

- 3 CASI DI ONDE in base al fenomeno causante senza attrito
- ① onda inerziale positiva



Il punto P è dato dalle condizioni iniziali; il punto P' risente dell'onda semplice con informazione da D .

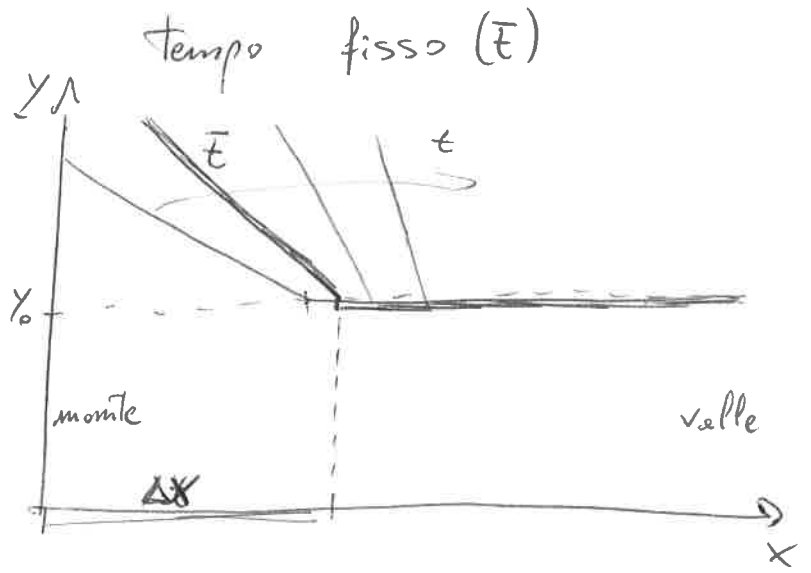
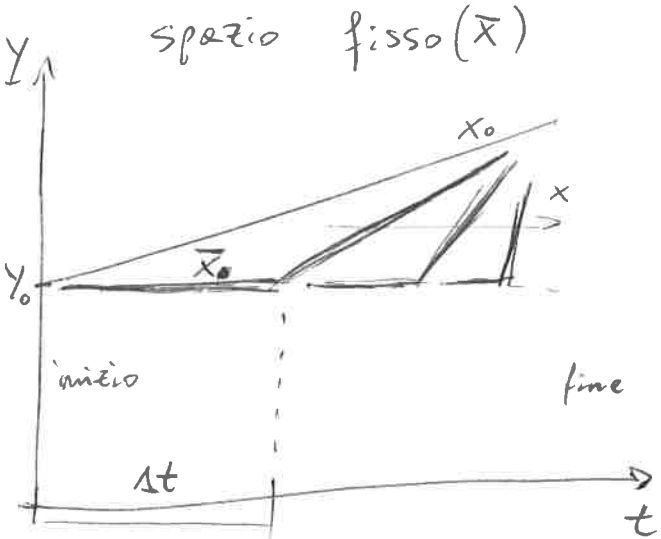
$P' \begin{cases} U_p + 2\sqrt{gY_p} = U_0 + 2\sqrt{gY_0} \\ U_p - 2\sqrt{gY_p} = U_0 - 2\sqrt{gY_0} \end{cases}$

onda semplice

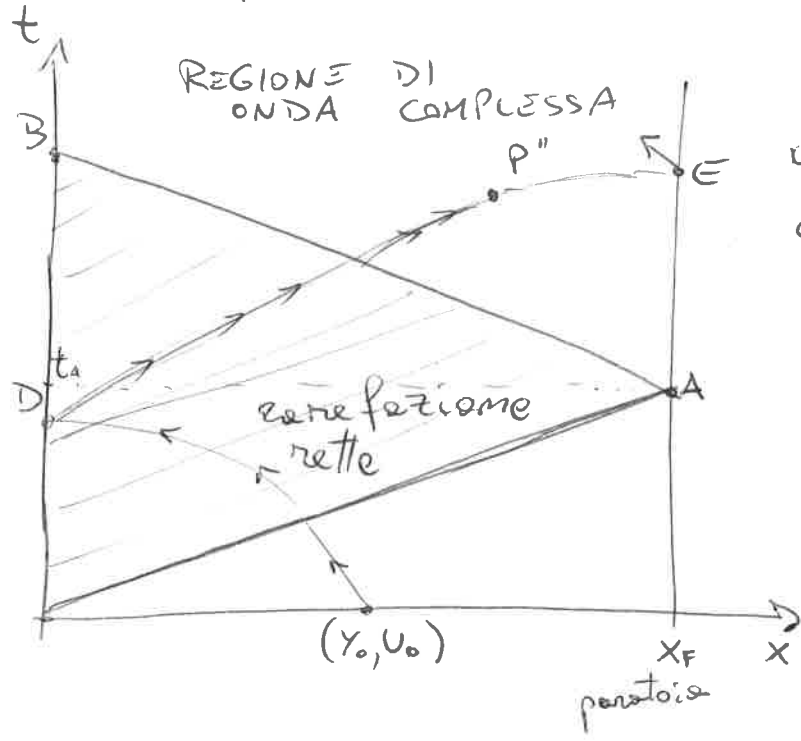
le caratteristiche C^+ conservano l'informazione da monte o da valle costantemente.

↳ Le rette sono **CONVERGENTI** essendo $\frac{dx}{dt} = U + \sqrt{gY}$, aumentano la pendenza della caratteristica al crescere della profondità Y .

⇒ la convergenza delle rette provoca discontinuità, quindi **FRANGIMENTO**.



ⓑ conce di navigazione, onda negativa con impatto alle paratoie alla fine del dominio.



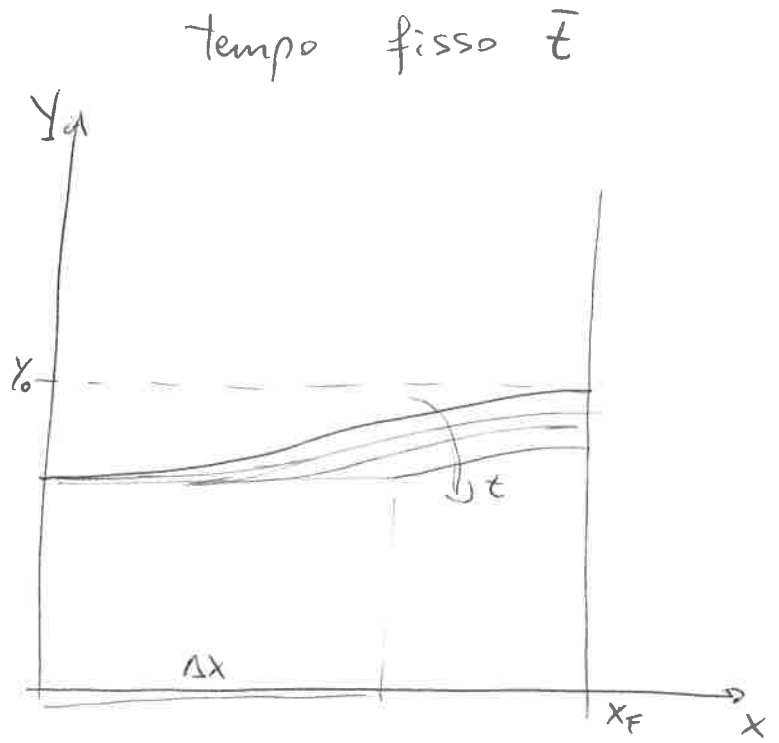
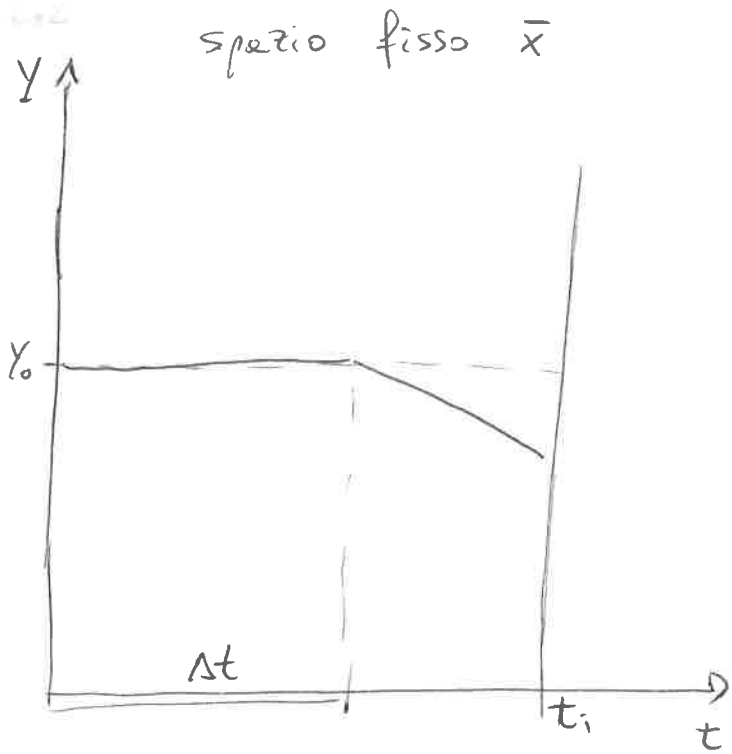
dal punto E (paratoia) parte un'onda negativa verso monte con informazioni da D

$$\begin{cases} U_E + 2\sqrt{gY_E} = U_0 + 2\sqrt{gY_0} \\ U_E = 0 \end{cases}$$

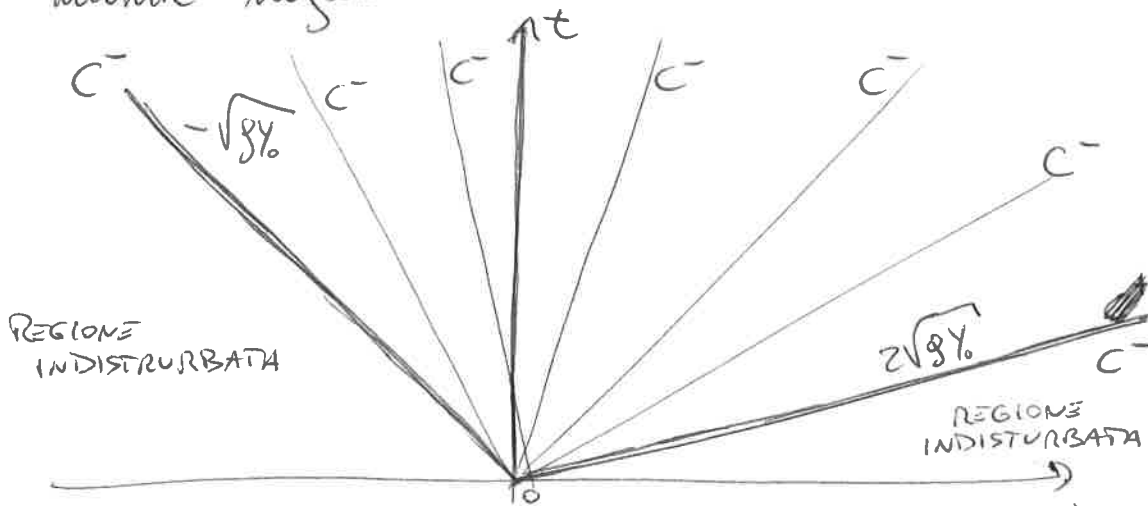
quindi $Y_E < Y_0$

il livello scende

Il punto P'' dipende dalle informazioni di monte prima della paratoia



③ crollò della diga (dam brake), contemporaneamente partono un'onda a valle positive ed una a monte negative.



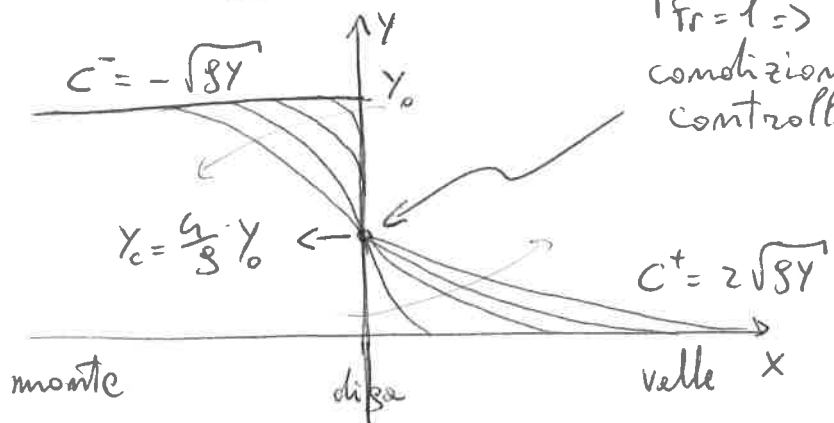
Nella regione di onda semplice si hanno le rette caratteristiche che in rarefazione

$$\begin{cases} U = 2\sqrt{gY_0} - 2\sqrt{gY} \\ C^- = 2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY} \end{cases}$$

punto critico
 $Fr = 1 \Rightarrow U = C$
 condizione di controllo

→ PROFILO dell'onda

$$Y = \frac{1}{gS} \left[2\sqrt{gY_0} - \frac{x}{t} \right]^2$$



Sistemi di equazioni delle corrente

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 & \text{eq. continuit\`a} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g j = 0 & \text{eq. moto} \end{cases}$$

Carattere onole \rightarrow INERZIALE accelera $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$
 \rightarrow FRIZIONALE rallenta $-g \frac{\partial h}{\partial x} + g j = 0$

\rightarrow MODELLO DIFFUSIVO
CINEMATICO

$$g \frac{\partial Y}{\partial x} + g(j - i f) = 0$$

ipotesi di oscillazione infinitesima
 $U = U_0 + U_1(x,t)$ com $U_1 \ll U_0$
 $Y = Y_0 + Y_1(x,t)$ / $Y_1 \ll Y_0$

La continuit\`a \`e data da

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0$$

Il moto \`e dato, ~~da~~ con dissipazione $j = \frac{U^2}{g C^2 Y}$, da

$$j = \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + g \frac{\partial Y_1}{\partial x} + g i f \left(2 \frac{U_1}{U_0} - \frac{Y_1}{Y_0} \right)$$

\triangle j non \`e lineare e si valuta

$$j = j_0 + j_1 = \frac{U_0^2}{g C^2 Y_0} + \frac{1}{g C^2} \left[\frac{2 U_0 U_1}{Y_0} - \frac{Y_1 U_0^2}{Y_0^2} \right]$$

Allora si distinguono i caratteri:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + C^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^- \frac{\partial}{\partial x} \right) Y_1}_{\text{onda inerziale}} + \underbrace{\frac{2 g i f}{U_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) Y_1}_{\text{onda frizionale}} = 0$$

I valori della celerità si distinguono

$$C_0 = m U_0 \quad (\text{con } m = S/3)$$

$$C^+ = U_0 + \sqrt{g y_0}$$

$$C^- = U_0 - \sqrt{g y_0}$$

L'onda inertiale

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} + C^+ \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} + C^- \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ha per soluzione $y_1 = \hat{y}_1 \cos[k(x - C^\pm t)]$

→ differenza nella celerità

L'onda frizionale

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + C_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0$$

ha per soluzione $y_1 = \hat{y}_1 \cos[k(x - C_0 t)]$

Paragone $\frac{C_0}{C^+} = \frac{m U_0}{U_0 + \sqrt{g y_0}} \Rightarrow \frac{m}{1 + \frac{1}{Fr_0}}$

→ l'onda frizionale riduce significativamente la propagazione, soprattutto per alvei fluviali $Fr \ll 1$.

Problema adimensionale:

dato $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \sim \omega^2 \varepsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^* = \omega t = \frac{t}{T} 2\pi \\ \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{y_0} \\ y^* = \frac{y}{y_0} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{y_0} \cos(t^*) \\ e \frac{d^2 \varepsilon^*}{dt^{*2}} = -\frac{\varepsilon}{y_0} \cos(t^*) \end{cases}$$

quindi $y^* = \cos[k(c^\pm - t^*)]$

Verifica DOMINIO adimensionale

$$\underbrace{\omega^2 y_0}_{\text{onda inertiale}} \gg \ll \frac{2g y_0^3}{U_0} \underbrace{y_0 \omega}_{\text{onda frizionale}}$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$

quindi valutando

$\frac{g \rho T}{\pi \rho_0}$	}	$\gg 1$ grande \rightarrow domina
		$\ll 1$ piccolo \rightarrow domina

ATRITO (frizionale)
 INERZIA (inerziale)

\hookrightarrow Dipendenza delle scale temporale T

fenomeni $\left\{ \begin{array}{l} \text{rapidi} \rightarrow T \text{ piccolo} \rightarrow \text{onda inerziale} \\ \text{lenti} \rightarrow T \text{ grande} \rightarrow \text{onda frizionale} \end{array} \right.$

scabrezza $\left\{ \begin{array}{l} \text{alta} \rightarrow T \text{ grande} \rightarrow \text{onda frizionale} \\ \text{basse} \rightarrow T \text{ piccolo} \rightarrow \text{onda inerziale} \end{array} \right.$

* ONDA REALE $\chi_1 = \hat{\chi}_1 e^{-\frac{x}{L_A}} \cos[k(x-ct)]$

propagazione in c , decadenza con $e^{-\frac{x}{L_A}}$.

L'onda inerziale è di tipo meccanica possibile nei fluidi in rotazione. Al contrario delle onde di gravità inerziali che si vedono comunemente, queste si muove all'interno di un fluido e non alla sua superficie.

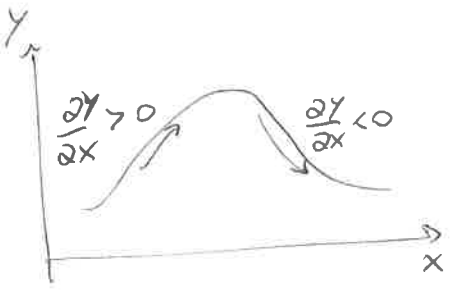
La forza di ripristino (causa) è la forza di Coriolis e le onde rientrano nella categoria delle onde trasversali.

→ ONDA DI PIENA

Approssimazione: fenomeno lento, quindi onde lunghe con T grande (onda frazionata).

MODELLI MATEMATICI $\left\{ \begin{array}{l} \text{modello cinematico diffusivo} \\ \text{modello percolativo} \end{array} \right.$

Sistema di equazioni $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{eq. continuità} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \dots - i\beta = 0 \quad \text{eq. moto} \\ Q = C \Omega \sqrt{g R_H \left(i\beta - \frac{\partial Y}{\partial x} \right)} \quad \text{scala deflusso piena} \end{array} \right.$



$$Q = \underbrace{C \Omega \sqrt{g R_H i\beta}}_{\text{moto uniforme}} \cdot \underbrace{\sqrt{R_H \left(1 - \frac{\partial Y / \partial x}{i\beta} \right)}}_{\text{termine per la pendenza dell'onda}}$$

La portata dipende dalla profondità, dall'inclinazione dell'onda e del percorso $Q(x) = Q \left[Y(x); \frac{\partial Y}{\partial x}(x); x \right]$

Quindi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial Y} \Big|_{x, \frac{\partial Y}{\partial x}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)} \Big|_{x, Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{Y, \frac{\partial Y}{\partial x}}$

nell'equazione di continuità

$$\left| b \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial Y} \Big|_{x, \frac{\partial Y}{\partial x}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)} \Big|_{x, Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{Y, \frac{\partial Y}{\partial x}} = 0 \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial Y} \Big|_{x, \frac{\partial Y}{\partial x}} = m \frac{Q}{Y} \\ \frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)} \Big|_{Y, x} = - \frac{Q}{2j} \end{array} \right. \Rightarrow \text{eq. di continuità} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{mQ}{Y} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{Q}{2j} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ b \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow \left| \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{mQ}{bY} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{Q}{2bj} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} \right|$$

Per le condizioni idrauliche di moto uniforme

$$C \Omega \sqrt{g R_H} i_f = k Y^m \quad \text{si trova } m = f(Y)$$

ovvero $m = Y \left[\frac{1}{6} Y^{-\frac{5}{6}} \frac{1}{Y^{-\frac{1}{6}}} + \frac{1}{bY} b + \frac{1}{2Y} \right] = \left(\frac{5}{3} \right)$ esponente del moto uniforme

(*) Sotomodello di ONDA CINEMATICA

→ Trascurare $\frac{\partial Y}{\partial x}$

Il sistema di equazioni diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ i = i_f \\ Q = k Y^m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} Y \\ Q = k Y^m \end{cases}$$

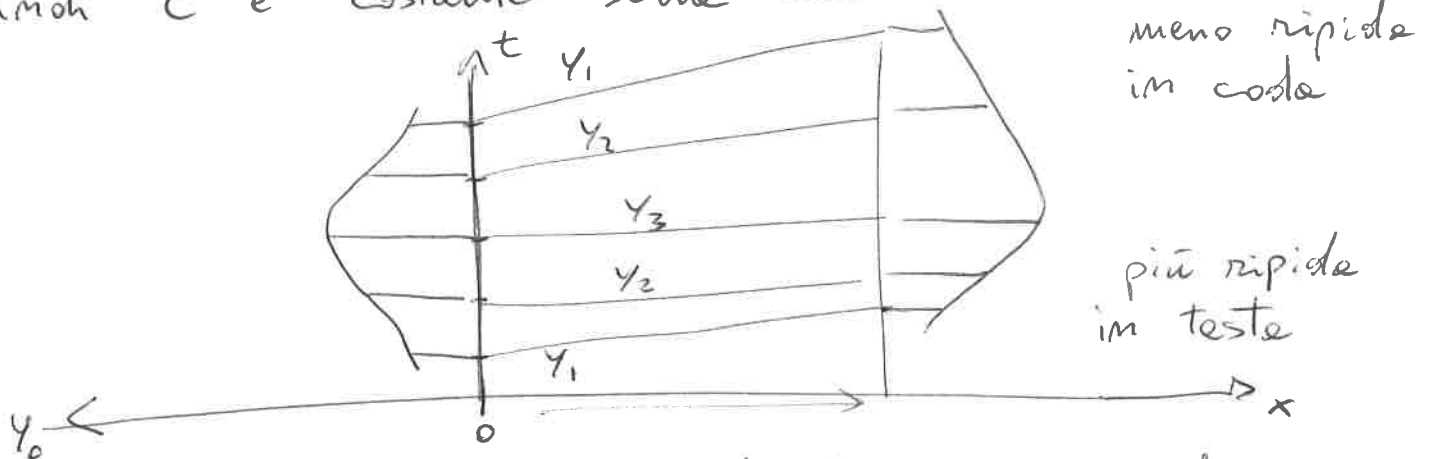
la celerità è $c = \frac{mk}{b} Y^{m-1} = m U \left(\frac{Y_m}{Y} \right) \sim m U$ onde iperboliche

dove $c^* = U + \sqrt{gY} \Rightarrow m U$

• l'onda di piena avanza lentamente ($Fr < 1$) con $m \approx \frac{5}{3}$ e Y cresce mentre c cresce \Rightarrow distorsione del segnale con irripidimento.

OSSERVATORE MOBILE $c = \frac{dx}{dt}$

informazioni verso valle senza attenuazioni ($Y, Q = \text{cost}$)
 quindi c è costante sulle caratteristiche



meno ripide
in coda

più ripide
in teste

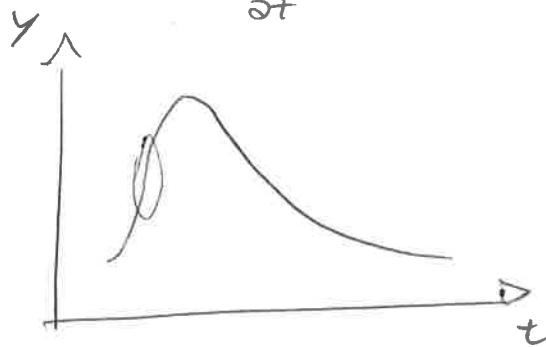
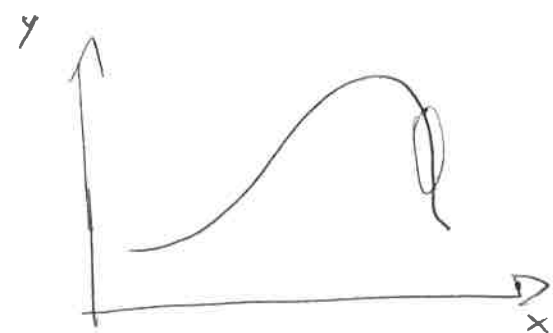
inclinazione delle rette caratteristiche $\tan \alpha = \frac{1}{c[Y(\bar{t})]}$

→ propagazione a valle $t = \bar{t} + \frac{x}{c[Y(\bar{t})]}$

Allora le onde di piena NON FRANGONO MAI perché sono lente e lunghe, possono irripidirsi infinitamente.

Il frangimento nel modello cinematico si osserva nelle onde di marea per cui

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} \rightarrow \infty \\ \frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow \infty \end{cases}$$



Ma il modello "acqua bassa" non è più valido.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \rightarrow \infty \quad \text{quindi} \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{x}{c^2} \cdot \frac{dc}{dy_0} \cdot \frac{dy_0}{d\bar{t}}}$$

$$X_{\text{frang}} = \frac{c^2}{\frac{dc}{dy_0} \cdot \frac{dy_0}{d\bar{t}}}$$

$$\text{con } c = \frac{km}{b} \cdot y^{m-1}$$

Si ha frangimento per $X_{\text{frang}} > 0$, quindi $\frac{dy_0}{d\bar{t}}$ grande -
 → fenomeno rapido. ~~(P. 111)~~

CASO 1: ALVEO NON CILINDRICO

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_y \\ Q = k y^m = k_s b^{5/3} y^{5/3} \end{cases}$$

$$\text{con } \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_y = Q \left[\underbrace{\frac{1}{k_s} \frac{dk_s}{x}}_{\text{cost}} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} + \underbrace{\frac{1}{24} \frac{d\mu}{dx}}_{\text{cost}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = - \frac{Q}{b^2} \frac{db}{dx}$$

Y ↗ allargamento $\frac{db}{dx} > 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} < 0$ attenuazione
 Y ↘ restringimento $\frac{db}{dx} < 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} > 0$ irripidimento

→ caratteristiche sono curve $c = f(y)$

CASO 2: ALVEO CILINDRICO

modello diffusivo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial t} + c \frac{\partial Y}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ Q = K Y^m \sqrt{1 - \frac{\partial Y / \partial x}{if}} \end{array} \right.$$

soluzione $Y = \hat{Y} \exp[-\gamma t] \cdot \cos[k(x-ct)]$

per cui si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma = -k^2 D_0 \\ kc = -k c_0 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = k^2 D_0 \\ c = c_0 \end{array} \right.$$

$Y = \hat{Y} \exp[-k^2 D_0 t] \cdot \cos[k(x - c_0 t)]$

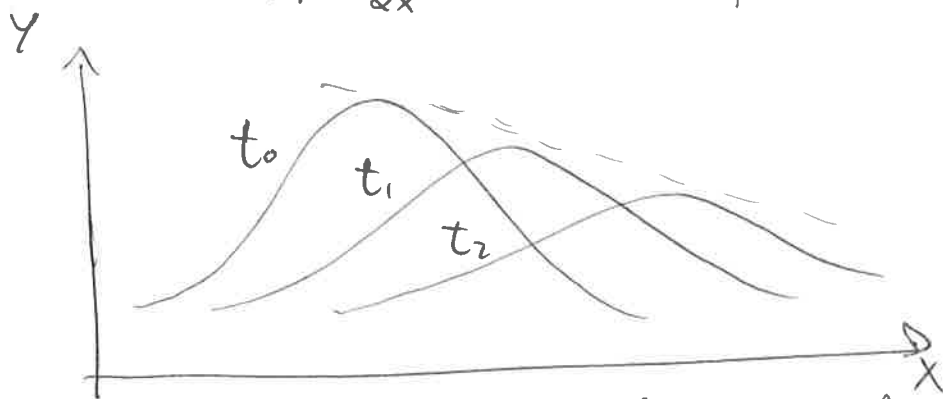
ovvero le onde di piena sono NON dispersive, con attenuazione secondo D_0 .

coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{celerità } c = \frac{Q}{bY} \text{ m} \\ \text{attenuazione } D = \frac{Q}{2bS} \end{array} \right.$$

da $Q \rightarrow c = \frac{KM}{b} Y^{m-1} \sqrt{1 - \frac{\partial Y / \partial x}{if}} \rightarrow$ aumenta con la profondità

$D = \frac{K_s Y^{5/3}}{2\sqrt{if - \frac{\partial Y}{\partial x}}} \rightarrow$ aumenta con la profondità



Attenuazione del segnale senza frangimento

In termini (Q, h) il modello parabolico è (completo):

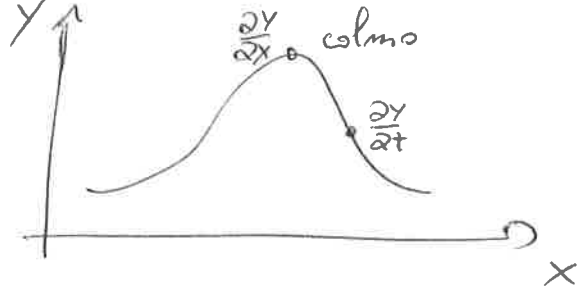
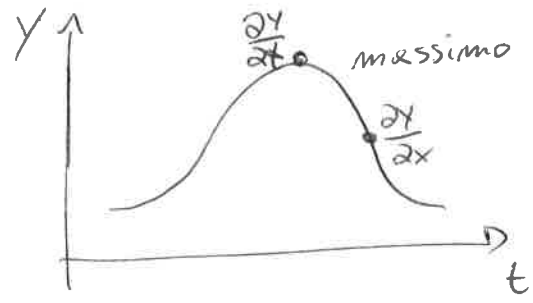
$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - c if - \frac{Q}{b^2} \frac{dh}{dx}$$

\downarrow attenuazione \downarrow pendenza \downarrow non cilindricità

CRESTA ONDA
 ↗ massimo $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \rightarrow c \frac{\partial Y}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$
 ↘ colmo $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$

↳ modello parabolico

↳ il colmo passa dopo il massimo locale

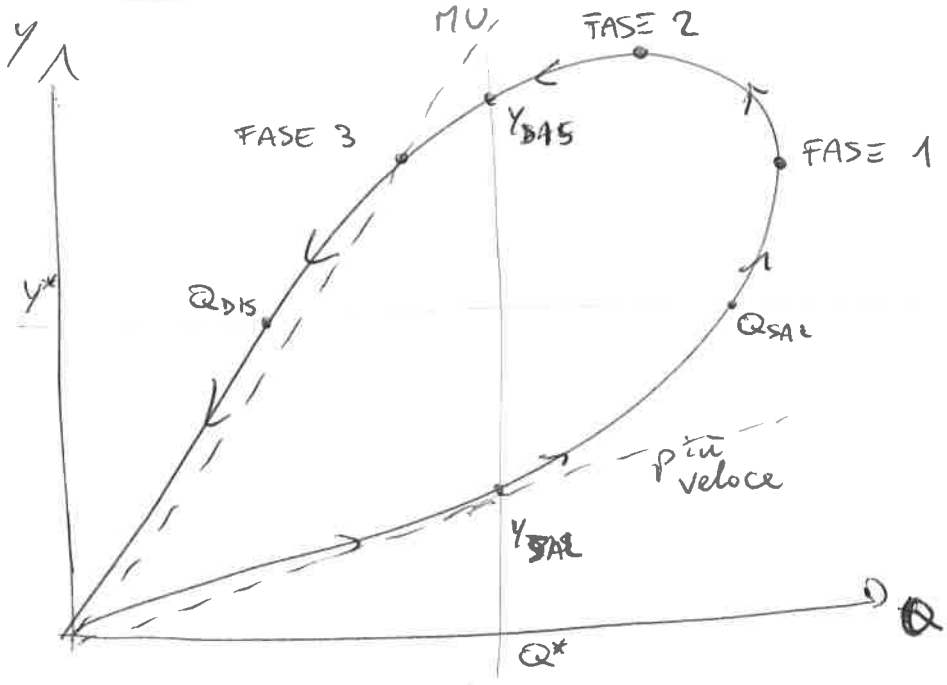


Confronto massime portate $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ e massimo locale $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$

- FASE 1 $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ massimo locale Q
- FASE 2 $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$ massimo locale Y
- $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ colmo Q
- FASE 3 $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ colmo Y

↳ CAPPIO DI PIENA

$$Q = K Y^m \sqrt{1 - \frac{\partial Y / \partial x}{u^2}}$$



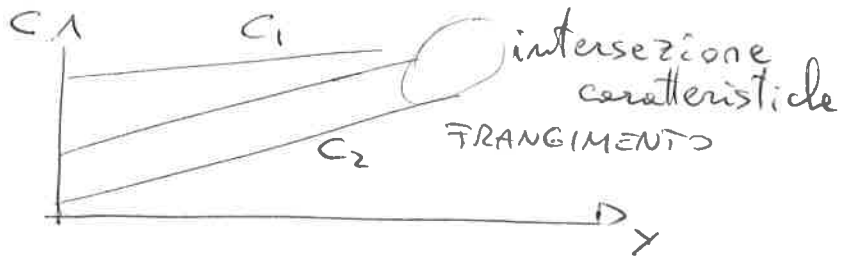
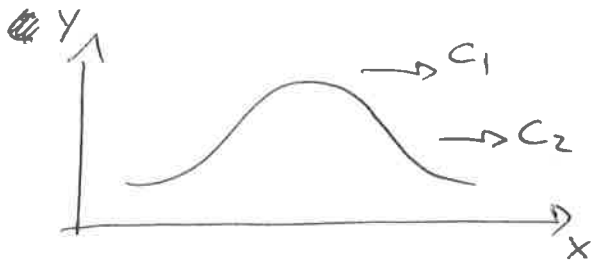
Ogni profondit  Y* corrisponde ad una portata in salita ed una in discesa, e viceversa.

Il cappio   pi  grande con onde veloci

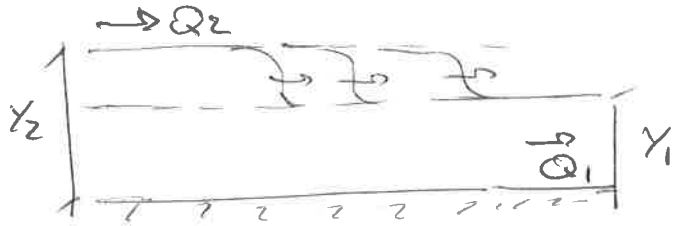
ONDA POSITIVA
VERSO VALLE

onda stabile
progressiva

onde con
frangimento



⇒ Cause: brusco aumento di portata $Q_1 \rightarrow Q_2$
Se tutti i punti dell'onda viaggiano con stessa celerità, l'onda è progressiva.



ONDA SEMPLICE rettangolare

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(Uy)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g(j - iy) = 0 \end{cases}$$

→ osservatore mobile $\hat{x} = x - at$
l'equazione di continuità diventa

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(Uy)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} - a \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(Uy)}{\partial \hat{x}} = 0 \right]$$

• La soluzione stabile non si trasforma nel tempo

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\hat{x}} (Uy - ay) = 0$$

$$U - a = U_R$$

$$\Rightarrow \boxed{U_R \cdot y = \text{cost}}$$

CONDIZIONE
DI
STABILITÀ

eq. continuità

Nel moto si ha:

$$-a \frac{dU}{d\hat{x}} + U \frac{dU}{d\hat{x}} + g \frac{dy}{d\hat{x}} + g(j - iy) = 0$$

FORMA del
PROFILO stabile
con osservatore
mobile

$$\boxed{\frac{dy}{d\hat{x}} = \frac{iy - j}{1 - F_{FR}^2}}$$

47
 Quindi il sistema dell'onda positiva e-

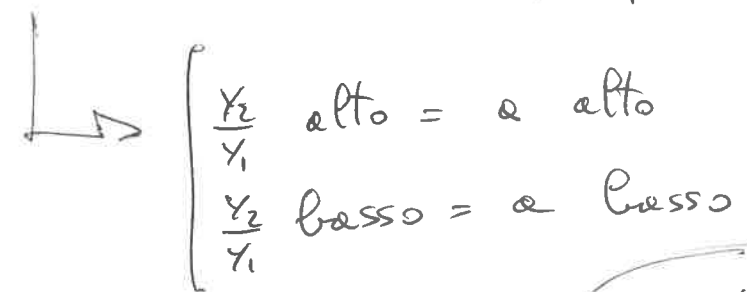
$$\begin{cases} (U-a)Y = k \\ \frac{dY}{dx} = \frac{if - \dot{s}}{1 - Fr^2} \end{cases} \quad \text{con } Fr^2 = \frac{k^2}{gY^3} = \frac{U^2}{gY}$$

condizioni al centotorno

$$\begin{cases} \text{monte } U_2 = C \sqrt{gY_2 if} \\ \text{valle } U_1 = C \sqrt{gY_1 if} \end{cases} \begin{cases} (U_1 - a)Y_1 = k \\ (U_2 - a)Y_2 = k \end{cases}$$

quindi sia $a = \frac{U_2 Y_2 - U_1 Y_1}{Y_2 - Y_1}$ rapporto portata/sezione
 \rightarrow ~~velocità~~ velocità di propagazione

moto uniforme: $a = C \sqrt{\frac{g if}{Y_1}} \frac{\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{3/2} - 1}{\frac{Y_2}{Y_1} - 1}$ dipendenza dall'altezza dell'onda Y_2



Dal sistema si ottiene $k = \frac{Y_1 Y_2 (U_1 - U_2)}{Y_2 - Y_1}$ INVARIABILMENTE NEGATIVO
 $k < 0$
 $[U_2 > U_1]$

In relazione all'altezza dell'onda si ha

$$k = - C \sqrt{g if} \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{Y_1} + \sqrt{Y_2}}$$

• Da monte a valle la velocità assoluta si riduce, la velocità relativa aumenta: $U_1 < U_2$, $U_{1R} > U_{2R}$.
 Mentre il Froude Fr^2 cresce ($Fr^2 \approx \frac{1}{Y^3}$).

• Profilo a monte $\frac{dY}{dx} = 0$, a valle $\frac{dY}{dx} = 0$

$$\rightarrow \dot{s} = \frac{U^2}{g C^2 Y} = \frac{(aY + k)^2}{g C^2 Y^3}$$

Allora $if - \dot{s} = \frac{if}{Y^3} \left[(Y - Y_1)(Y - Y_2)(Y - Y_3) \right]$ punto centrale dell'onda (incognito)

Per avere $\frac{dy}{dx} < 0$ significa che $if - j < 0$

STABILITÀ: $F_{FR}^2 < 1 \rightarrow$ in tutti i punti ottenere corrente lenta in alveo fluviale.

$$F_{FR}^2 = \frac{(U - \alpha)^2}{gY} < 1 \rightarrow \alpha < U + \sqrt{gY} \Rightarrow \boxed{\alpha < C^+}$$

CONDIZIONE DI NON FRANGIMENTO

Controllo rispetto all' altezza limite $-k \leq Y \sqrt{gY}$
 \rightarrow a valle altezza minore, velocità maggiore

$$-k \leq Y_1 \sqrt{gY_1} \quad \text{quindi} \quad C \sqrt{g if} \frac{Y_2}{\sqrt{Y_2 - Y_1}} \leq Y_1 \sqrt{gY_1}$$

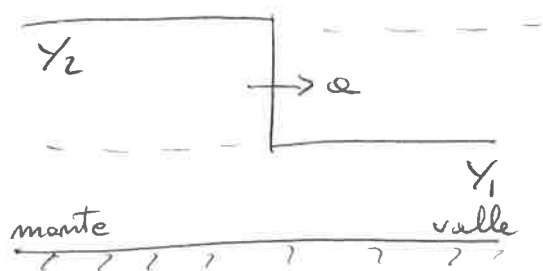
$$\Rightarrow C \sqrt{if} \frac{Y_2}{Y_1} - 1 - \frac{\sqrt{Y_2}}{\sqrt{Y_1}} \leq 0$$

Condizione limite di profondità

$$\boxed{\frac{Y_2}{Y_1} \leq \frac{(1 + \sqrt{1 + 4C \sqrt{if}})^2}{4C^2 if}}$$

if basso $\rightarrow (\frac{Y_2}{Y_1})_{lim}$ alto \leadsto ~~frangente~~ progressive
 if alto $\rightarrow (\frac{Y_2}{Y_1})_{lim}$ basso \leadsto frangente

+ Se $\alpha > C^+ = U_1 + \sqrt{gY_1}$ si ha FRANGIMENTO, succede per una discontinuità (~~in seguito~~) (o risalto).



Problema in 2 variabili (U, Y)
 per ogni moto

Le 5 variabili $(U_1, Y_1, \alpha, U_2, Y_2)$

osservatore mobile
 $\hat{x} = x - at$

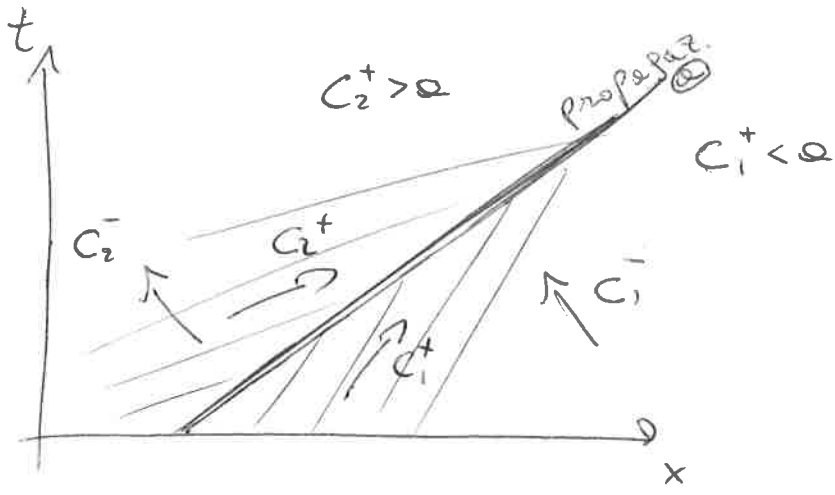
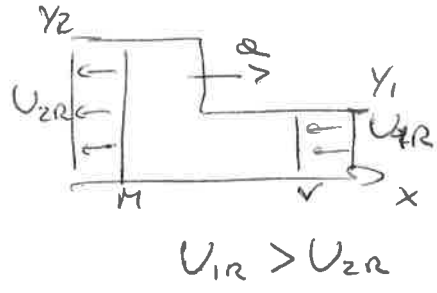
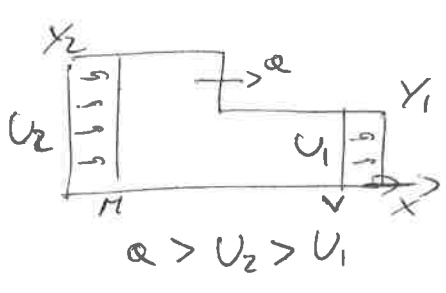
\rightarrow onde

positive $\alpha > 0$ (pressione) com $U_k < 0$
 negative $\alpha < 0$ (depressione)

• CLASSIFICAZIONE ONDE

Ⓐ onda discendente positiva: crollo diga, $Q_2 > Q_1$

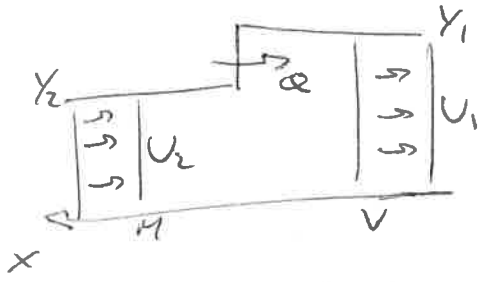
$Q > 0$ a valle, $U_L > 0$, $U_R < 0$



Sulle retta di shock della propagazione si hanno un'informazione da monte C_2^+ e due da valle C_1^+ , C_1^- .

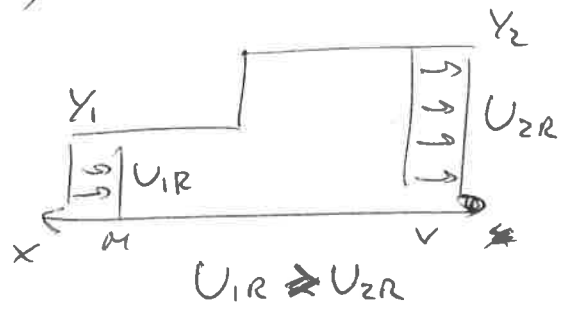
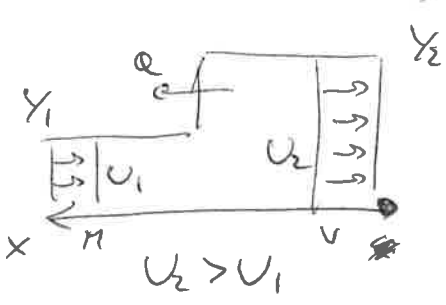
Ⓑ onda discendente negativa: $Q_2 < Q_1$

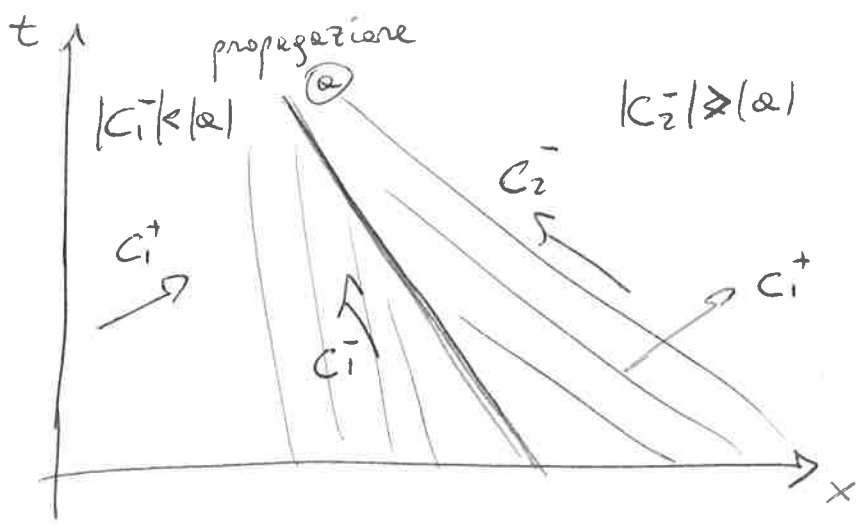
$Q < 0$ a valle, $U_L < 0$, $U_R < 0$



frangimento solo in casi eccezionali ed istantanei.

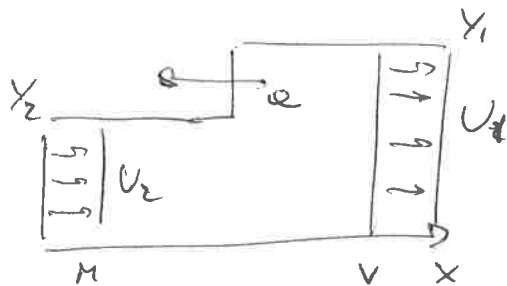
Ⓒ onda ascendente positiva: paratoia chiusa $U_L < 0$, $U_R < 0$





sulla retta di shock di propagazione si hanno un'informazione da valle ~~monte~~ C_2^- e due da ~~valle~~ ~~monte~~ C_1^-, C_1^+ .

① onda ascendente negativa: rarefazione
 $a < 0$ a monte, $U > 0$, $U_R < 0$



frangimento solo in casi eccezionali ed istantanei

• EQUAZIONI con osservatore mobile

$$\begin{cases} U_R \cdot Y = \text{cost} \\ S_R = \text{cost} \end{cases} \quad \begin{cases} U_{1R} Y_1 = U_{2R} Y_2 \\ \frac{\delta b}{2} Y_1^2 + \rho U_{1R}^2 \cdot b Y_1 = \frac{\delta b}{2} Y_2^2 + \rho U_{2R}^2 \cdot b Y_2 \end{cases}$$

Con propagazione $a = \frac{Y_2 U_2 - Y_1 U_1}{Y_2 - Y_1}$

spinta costante porta a $U_{2R}^2 = \frac{g}{2} (Y_1 + Y_2) \frac{Y_1}{Y_2}$, quindi

il numero di Froude a monte è $F_{1R}^2 = \frac{Y_1}{2Y_2} \left(\frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} \right) < 1$,

mentre a valle $F_{2R}^2 = \frac{Y_2}{2Y_1} \left(\frac{Y_1 + Y_2}{Y_1} \right) > 1$

⇒ frangimento collega la corrente lenta di monte (2) con la corrente veloce di valle (1).

Secondo la trattazione unidimensionale del problema, le variabili Q e h risultano funzioni di due variabili: coordinate longitudinale x e tempo t .

• Equaz. di continuità: sia dt l'intervallo temporale nel quale effettuiamo un bilancio di massa riferito ad un volume di controllo delimitato da due sezioni della corrente, della superficie dell'alveo e del fondo, nella ~~stessa~~ configurazione all'istante t .

I contributi sono

- portata massica entrante $\rho Q dt$
- portata massica uscente $\rho(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) dt$
- variazione superficie $\rho \frac{\partial(A dx)}{\partial t} dt$

Quindi si ha il principio per il quale in un moto non stazionario un aumento della portata volumetrica nella direzione x deve essere bilanciato da un $\Delta b =$ abbassamento del pelo libero nel tempo.

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0}$$

• Equaz. del moto: dall'equazione unidimensionale di Saint Venant $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R_H}$, si trasforma

in $\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = -\gamma \rightarrow$ cadente piezometrica

Il carico piezometrico è definito $h = z + \int \frac{1}{\gamma} dp = z + \gamma$,

l'equazione del moto diventa

$$\boxed{\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = \bar{\gamma} - \gamma}$$

Le linee delle CARATTERISTICHE sono linee di discontinuità del problema differenziale e rappresentano il percorso seguito dalle perturbazioni.

→ ipotesi di alveo prismatico ($dA = B dY$, $dB = 0$) modifica l'equazione

$$V \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

Anche nel caso di moto vario e superficie libera il sistema delle equazioni del moto e di continuità è del tipo iperbolico e può essere trasformato in un problema differenziale ordinario lungo le caratteristiche -

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(V + 1 \frac{A}{B} \right) \frac{\partial V}{\partial x} + 1 \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \left(V + \frac{S}{1} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} \right] = g(\eta - \bar{\eta})$$

Per una PDO si ha $V + 1 \frac{A}{B} = V + \frac{S}{1} = \frac{dx}{dt} = V \pm c$

L'equazioni del moto vario diventano

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{S}{c} \frac{dY}{dt} = g(\eta - \bar{\eta}) \\ \frac{dV}{dt} - \frac{S}{c} \frac{dY}{dt} = g(\eta - \bar{\eta}) \end{cases}$$

Nello studio delle ONDE di PIENA si ha la possibilità di trattare il moto come una lenta successione variabile in spazio e Tempo di moti uniformi con le caratteristiche istantanee e locali - Quindi si assume che portata e area della sezione siano legate in ogni sezione ed in ogni istante dal legame caratteristico del moto uniforme -

Approssimazioni:

- Ⓐ trascurate l'inerzia → modello parabolico
- Ⓑ trascurato il non parallelismo Tra superficie e fondo → modello cinematico

$$A \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \eta - \bar{\eta} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} Q = KA^m \\ \frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

onda PARABOLICA

L'equazione di continuità si può riscrivere come

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{dove} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial Q} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

diventa

$$\frac{1}{B \frac{\partial S}{\partial Q} \frac{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \frac{\partial S / \partial h}{\partial S / \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\boxed{D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad \left[\begin{array}{l} D = \text{dispersione} \\ c = \text{celerità onda} \end{array} \right.$$

Si può scrivere anche $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial Q} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$, che nell'onda cinemática ($S=if$) si ottiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

L'osservatore mobile vede la variazione di portata come ~~$\frac{dQ}{dt}$~~ $\frac{dQ}{dt} = S \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} < 0$, allora l'onda si appiattisce e si attenua. Dalla formula di Chezy $S = if - \frac{\partial h}{\partial x}$, si definisce la portata $Q = Q_0 \sqrt{1 - \frac{\partial h / \partial x}{if}}$, quindi è uguale alla portata del moto uniforme (Q_0) solo se la sezione è quella in cui l'altezza d'acqua raggiunge il massimo valore nello spazio ($\frac{\partial h}{\partial x} = 0$).

→ sez. a valle $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$, $Q > Q_0$

→ sez. a monte $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$, $Q < Q_0$

~~Massimo temporale $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$~~ Per la continuità, il massimo speciale $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ corrisponde al massimo temporale

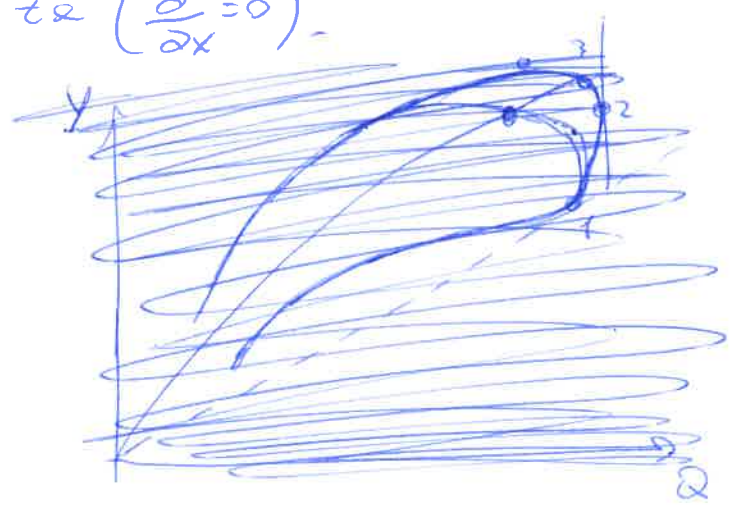
$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Nel massimo temporale $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ si ha $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{D}{c} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$.

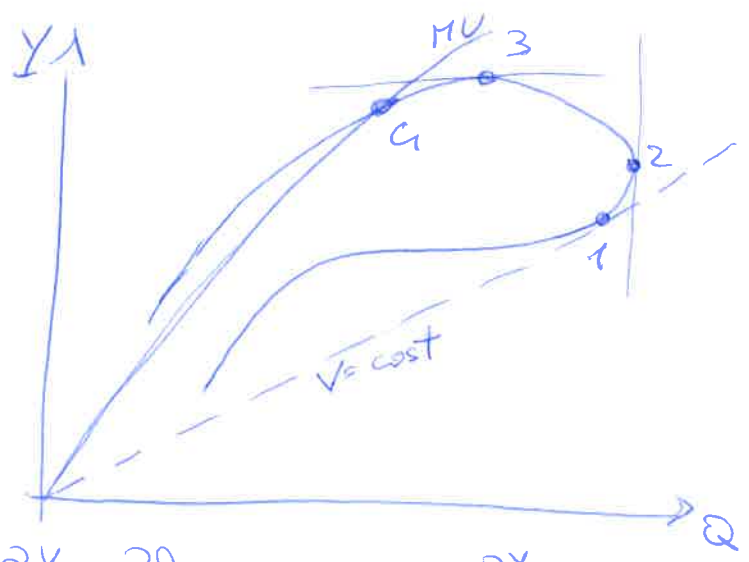
\Rightarrow la sezione in cui si realizza il massimo temporale di portata si trova a valle di quella in cui si ha massimo spaziale.

In una sezione si susseguono:

- MAX Q \rightarrow h_i MAX \rightarrow h_{MAX} di moto uniforme
- MASSIMO LOCALE: valore di una particolare grandezza cinematica che si verifica in una sezione fissata quando si annulla la derivata temporale della stessa grandezza ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).
- COLMO: valore di una particolare grandezza cinematica che si verifica in una sezione fissata quando si annulla la derivata spaziale della stessa grandezza ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$).



1 $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ 2 $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ 3 $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 4 $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$



B ONDA CINEMATICA

La scelta di deflusso è $Q = k A^m$; il problema consiste nella ricerca delle funzioni $A(x,t)$ e $Q(x,t)$ in ogni sezione a valle dell'iniziale ed ogni istante successivo il tempo iniziale.

L'ipotesi di alveo cilindrico porta ad assumere $k = \text{cost}$, $m = \text{cost} \rightarrow Q = f(A)$.

Allora $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{dA} \frac{\partial A}{\partial x}$, quindi $\frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$ dove la celerità dell'onda $c(A) = \frac{dQ}{dA} = m k A^{m-1} = \frac{mQ}{A}$

ipotesi 1. PICCOLA AMPIEZZA $\frac{Q}{Q_0} \rightarrow 0$ (caso zero)

si assume $c = c_0 = \text{cost}$, assumendo $A = f(x - c_0 t)$.
 Qualsiasi funzione propagatoria soddisfa l'equazione del modello cinematico; la soluzione è $A = A_0(x - c_0 t)$.
 Si ottiene che nella sezione x si realizza all'istante $\tau + \frac{x}{c_0}$ lo stesso valore di A che, nella sezione iniziale si realizza all'istante τ .

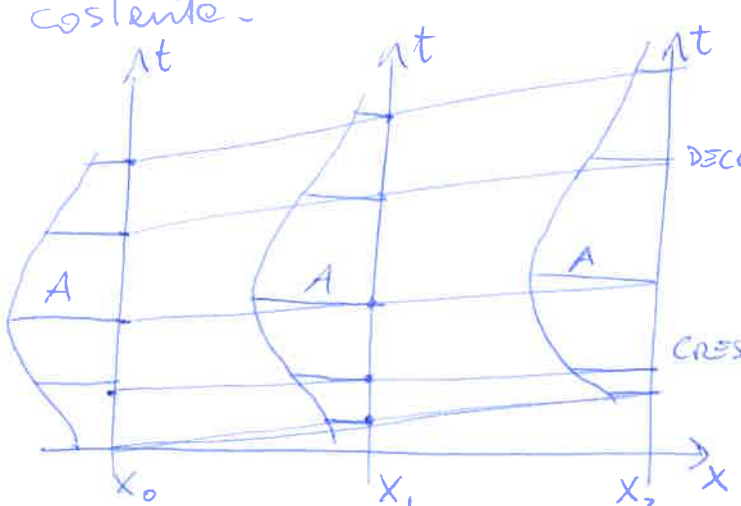
→ un'onda di piccola ampiezza si propaga con celerità c_0 costante senza subire variazioni di ampiezza o di forma

ipotesi 2. GRANDE AMPIEZZA $\frac{Q}{Q_0} \rightarrow \infty$ (caso reale)

L'equazione differenziale è non lineare poiché contiene termini in cui compaiono prodotti fra la funzione incognita e se stessa o le sue derivate.

La condizione $c(A) = \frac{dx}{dt}$ porta a $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0$

Su ciascuna delle rette caratteristiche, l'area della sezione A si mantiene costante, quindi anche c sarà costante.



FASE CRESCENTE, la celerità cresce e la pendenza diminuisce → convergenza
 - FASE DECRESCENTE, sia la celerità che la pendenza crescono → divergenza

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE PARZIALI IPERBOLICA

Un'equaz. diff. D.P.I. di ordine "n" è un'equaz. alle derivate che ha un problema ai valori iniziali ben posto per le prime "n-1" derivate. Il problema di Cauchy può essere risolto localmente per qualunque dato iniziale posto arbitrariamente lungo ogni ipersuperficie non caratteristica.

Equazione delle onde
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

↳ se $u(x,t)$ e la sua prima derivata temporale sono dati iniziali arbitrari lungo la linea iniziale $t=0$, allora esiste una soluzione per tutto il tempo.

• ~~una~~ Non tutti i punti dello spazio risentono assieme di un disturbo nei dati iniziali. I disturbi hanno una velocità di propagazione finita e viaggiano lungo le caratteristiche. Questa è la differenza con le derivate paraboliche ed ellittiche.

• le equazioni non lineari sono iperboliche se le loro linee caratteristiche sono iperboliche secondo Gårding.

DEFINIZIONE: un'equazione differenziale alle derivate parziali è iperbolica al punto P se il problema di Cauchy è risolvibile unicamente in un intorno di P per ogni dato iniziale posto su un'ipersuperficie non caratteristica passante per P. Qui i dati iniziali consistono in tutte le derivate trasversali sulla superficie fino all'ordine inferiore rispetto a quello dell'equazione.

DEFUSSO del moto uniforme

velocità $v = C \sqrt{g \cdot i_f \cdot R_H} \rightarrow$ portata $Q = \Omega C \sqrt{g \cdot i_f \cdot R_H}$

\rightarrow C coefficiente di Chezy = $\frac{k_s R_H^{1/6}}{\sqrt{g}}$ formula empirica

Quindi $Q = \Omega \frac{k_s R_H^{1/6}}{\sqrt{g}} \sqrt{g \cdot i_f \cdot R_H}$

$\rightarrow = \Omega k_s \sqrt{i_f} R_H^{2/3}$ con dipendenza della profondità

sezione
geometrica
alveo

raggio
idraulico $\left(\frac{\Omega}{B}\right)$

Il coefficiente C racchiude la scabrezza (k_s) superficiale del contorno bagnato e la forma, con aggiunta del fattore f .

$C = \frac{k_s (f R_H)^{1/6}}{\sqrt{g}}$, quindi $Q = \Omega (f) k_s \sqrt{i_f} (R_H (Y))^{2/3}$

⚠ l'esponente al raggio idraulico è $2/3 (< 1)$ ma il contributo della sezione porta alla dipendenza generale del deflusso $Q = k Y^m$ (con $m > 1$).

Per ALVEO RETTANGOLARE $\Omega = Yb$ e $B = 2Y + b$

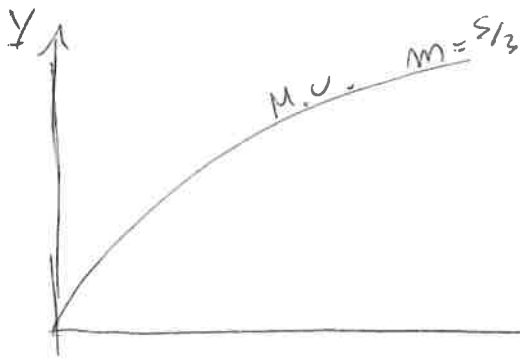
$Q = Yb k_s f^{1/6} \sqrt{i_f} \left(\frac{Yb}{2Y+b}\right)^{2/3}$

\rightarrow Per ALVEO RETTANGOLARE LARGO ~~R_H~~ $Y \ll b$ allora $R_H \sim Y$

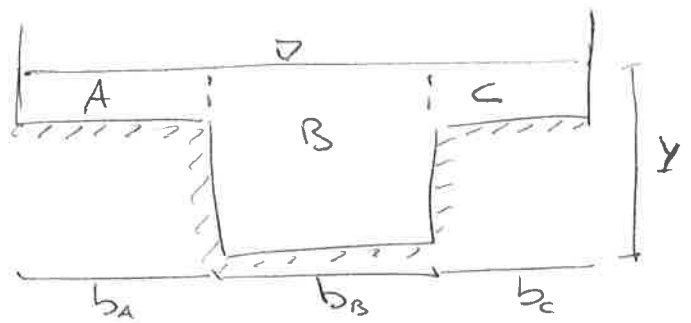
$Q = Yb k_s f^{1/6} \sqrt{i_f} Y^{2/3} = b k_s f^{1/6} \sqrt{i_f} Y^{5/3}$

ovvero l'altezza di moto uniforme è

$Y_u = \left(\frac{Q}{b k_s f^{1/6} \sqrt{i_f}}\right)^{3/5}$



$Q = k Y^m$
con $m > 1$



Alveo con variazione di fondo \rightarrow golene

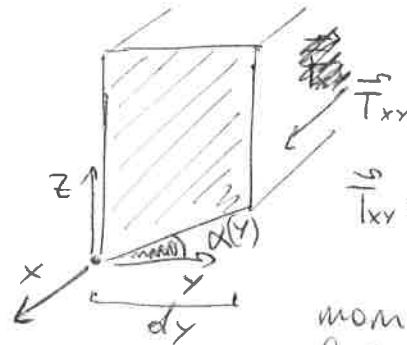
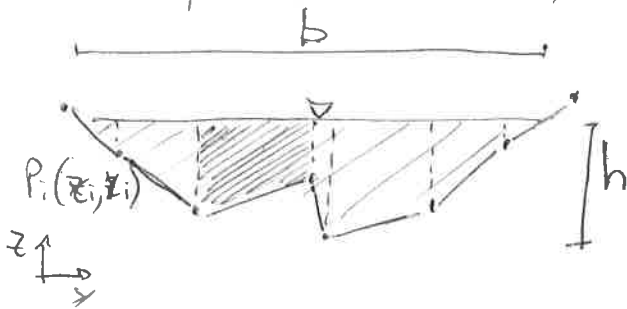
\Downarrow
Divisione aree verticali

METODO DI ENGELUND

ipotesi:

- superficie parallela al fondo
- pendenza costante lungo ~~il~~ ~~corso~~ corso
- nessuna tensione tangenziali tra le sezioni verticali

Noti i punti del fondo, si ha la profondità locale $y_i = h - z_i$



$$\int_{-y}^y T_{xy} dz = 0$$

non si considerano le tensioni alle facce verticali

$$\int \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{T_x^F}{\rho y} = 0 \quad \text{equazione del moto nel modello 2D}$$

localmente il raggio idraulico $r_H = \frac{dR}{dB} = \frac{(y(y) + y(y) + dy) dy}{2 \frac{dy}{\cos(\alpha(y))}}$

$$\Rightarrow r_H = \frac{y dy}{dy} \cos(\alpha(y)) = \underline{y(y) \cos(\alpha(y))}$$

si approssima all'altezza considerando la pendenza del fondo

\hookrightarrow $r_H(y)$ da modificare nel moto locale uniforme

$$\tau = \gamma \text{ if } r_H \Rightarrow \gamma \text{ if } \gamma(y) \cos(\alpha(y))$$

Le proprietà globali τ_0 e B portano a

$$\tau_0 B = \int_B \tau(y) dB \Rightarrow \gamma \text{ if } \int_B \gamma(y) dy \quad \begin{array}{l} \text{sezione} \\ \text{alveo} \end{array}$$

$$\tau_0 B = \gamma \text{ if } \Omega \rightarrow \boxed{\tau_0 = \gamma \text{ if } R_H}$$

La forma locale per stiscia pone $\tau(y) = \rho \frac{u^2(y)}{c^2(y)}$

$$\text{in cui } u(y) = c(y) \sqrt{\gamma \text{ if } r_H(y)}$$

Mentre la forma globale ha $\tau = \rho \frac{u^2}{c^2} = \gamma \text{ if } R_H$, si

$$\text{calcola la velocità } u^2 = \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u d\Omega \right]^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u^2 &= \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} c(y) \sqrt{\gamma \text{ if } r_H(y)} d\Omega \right]^2 \\ &= \frac{\gamma \text{ if}}{\Omega} \left[\int c(y) (\gamma(y))^{3/2} \cos(\alpha(y))^{1/2} \cdot dy \right]^2 \end{aligned}$$

il moto uniforme ha $u = c \sqrt{\gamma \text{ if } R_H}$, allora

$$c^2 R_H \gamma \text{ if} = \frac{\gamma \text{ if}}{\Omega} \left[\int c(y) (\gamma(y))^{3/2} \cos(\alpha(y))^{1/2} \cdot dy \right]^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{c^2 R_H = \frac{1}{\Omega} \left[\int c(y) \cdot (\gamma(y))^{3/2} \cdot \cos(\alpha(y))^{1/2} \cdot dy \right]^2}$$

Il prodotto $c^2 R_H$ porta al deflusso

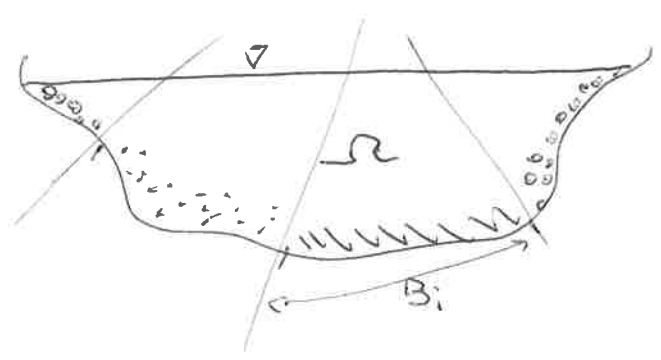
$$Q = \sqrt{\gamma \text{ if}} \cdot \left(\int c(y) \cdot (\gamma(y))^{3/2} \cos(\alpha(y))^{1/2} \cdot dy \right)$$

* Il metodo di Engelund è ottimale per alvei con piccole variazioni di fondo e in superficie libera.

METODO DI HORTON

Ricerca di un più realistico valore della scabrezza globale di un alveo eterogeneo (k_{se}).

Ad ogni sottosezione corrisponde un valore k_{si} relativo all' i -esima contorno bagnato B_i .



Ipotesi:

- pendenza costante lungo il corso
- velocità per moto uniforme
- velocità uguale in tutta la sezione

* È utilizzato anche per condotte in pressione ma impreciso.

Il raggio idraulico locale $r_{hi} = \frac{\Omega_i}{B_i}$, quindi il deflusso ha velocità $u_i = k_{si} \sqrt[4]{\left(\frac{\Omega_i}{B_i}\right)^{2/3}}$

Corrisponde la velocità globale $U = k_{se} \sqrt[4]{\left(\frac{\Omega}{B}\right)^{2/3}}$ con il vincolo geometrico $\Omega = \sum_i \Omega_i$.

Quindi vale la relazione $k_{si} \sqrt[4]{\left(\frac{\Omega_i}{B_i}\right)^{2/3}} = k_{se} \sqrt[4]{\left(\frac{\Omega}{B}\right)^{2/3}}$

$$\rightarrow \Omega_i = \left(\frac{k_{se}}{k_{si}}\right)^{3/2} \frac{\Omega}{B} B_i; \text{ per cui } \Omega = \sum_i \left(\frac{k_{se}}{k_{si}}\right)^{3/2} \frac{\Omega}{B} B_i$$

che porta a $k_{se} = \frac{B^{2/3}}{\left(\sum_i \frac{B_i}{k_{si}^{3/2}}\right)^{2/3}}$ media pesata per il contorno bagnato

⇒ Non risulta necessario conoscere le sezioni Ω_i .

COORDINATE EULERIANE e LAGRANGIANE

La descrizione euleriana è più utile per descrivere il campo di moto, invece il riferimento lagrangiano può essere d'aiuto per scrivere equazioni di bilancio di forze su una singola particella.

EULERO:

Le proprietà del flusso sono definite come funzioni dello spazio. L'osservatore è fisso o inerziale e fotografa il campo di velocità ad ogni istante, senza avere informazioni relative alla singola particella.

LAGRANGÈ:

Si focalizza sulla singola particella. Le proprietà del flusso sono funzioni del particolare elemento fluido, oltre che del tempo t . La posizione è in x_0 all'istante iniziale, allora la sua velocità all'istante t è descritta come

$$\vec{v} = v(x_0, t).$$

