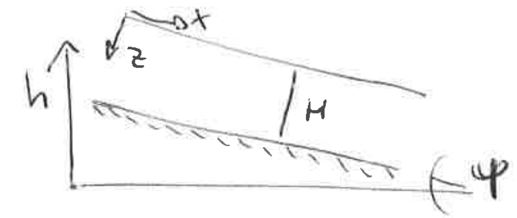
DIMOSTRAZIONI MOTI

MOTO ASSESTAMENTO + SCORRIMENTO

ipotesi: moto permanente e uniforme



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\ U = f(z) \end{cases}$$

velocità di deformazione

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U_x}{\partial z} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

fluido comprimibile $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$

$$t_{ij} = \lambda \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

(con $\delta = 0$ se $i \neq j$
$\delta = 1$ se $i = j$)

$$t = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\partial U_z}{\partial z} & \mu \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial U_x}{\partial z} & (\lambda + 2\mu)\frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

tensore delle Tensioni

EQUAZIONE DEL MOTO: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji}$

per $\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = 0$ si ha

$$\begin{cases} 0 = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x} t_{xx}} + \frac{\partial}{\partial z} t_{xz} \\ 0 = -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x} t_{zx}} + \frac{\partial}{\partial z} t_{zz} \end{cases}$$

con $\frac{\partial h}{\partial x} = -\sin\psi$
e $\frac{\partial h}{\partial z} = -\cos\psi$

$$\begin{cases} \rho g \sin\psi + \frac{\partial}{\partial z} t_{xz} = 0 \\ \rho g \cos\psi + \frac{\partial}{\partial z} t_{zz} = 0 \end{cases}$$

bilancio dinamico di forze

integrazione in $\mathcal{L} \simeq z$ variabile verticale

$$\int_0^z \rho(\mathcal{L}) g \sin\psi \, d\mathcal{L} + \int_0^z \frac{\partial t_{xz}}{\partial \mathcal{L}} d\mathcal{L} = 0$$

$$\int_0^z \rho(\mathcal{L}) g \cos\psi \, d\mathcal{L} + \int_0^z \frac{\partial t_{zz}}{\partial \mathcal{L}} d\mathcal{L} = 0$$

con $\bar{\rho}(z) = \int_0^z \rho(\mathcal{L}) d\mathcal{L}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{xz}(z) = -g \sin\psi \, \bar{\rho}(z) \cdot z = \mu \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ t_{zz}(z) = -g \cos\psi \, \bar{\rho}(z) \cdot z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial U_z}{\partial z} \end{cases}$$

integrazione delle Tensioni in $\mathcal{L}$ verticale (da H a z)

$$\int_H^z \mu \frac{\partial U_x}{\partial \mathcal{L}}\, d\mathcal{L} = \int_H^z -g \sin\psi\, \bar{\rho}\, \mathcal{L}\, d\mathcal{L}$$

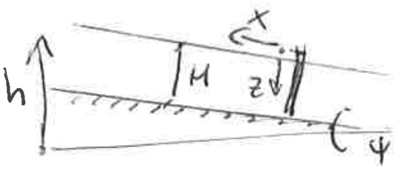
$$U_x(z) = \frac{g \sin\psi}{\mu}\, \bar{\rho} \left(\frac{H^2 - z^2}{2} \right)$$ velocità direzione $\hat{x}$

$$\int_H^z (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial \mathcal{L}}\, d\mathcal{L} = \int_H^z -g \cos\psi\, \bar{\rho}\, \mathcal{L}\, d\mathcal{L}$$

$$U_z(z) = \frac{g \cos\psi}{\lambda + 2\mu}\, \bar{\rho} \left(\frac{H^2 - z^2}{2} \right)$$ velocità direzione $\hat{z}$

MOTO PREVALENTE SLITTAMENTO con paravalanghe

ipotesi: velocità costante in $\hat{z}$, $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$; parete liscia; moto permanente di lento scorrimento; H indipendente da $\hat{x}$.



velocità di deformazione

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial U_z}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$t_{ij} = \lambda \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$ tensore delle tensioni

$$t = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_z}{\partial z} & \tau_0 \\ \tau_0 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dall'equazione del moto

$$\begin{cases} 0 = +\rho g \sin\psi + \frac{\partial}{\partial x} t_{xx} + \frac{\partial}{\partial z} t_{xz} \\ 0 = +\rho g \cos\psi + \frac{\partial}{\partial z} t_{zz} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x} t_{xz}} \end{cases}$$ $\longrightarrow$ integrate nelle profondità $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} t_{zz}(z) = -g \cos\psi\, \bar{\rho}(z) \cdot z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ t_{xx}(z) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left[t_{zz} - \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] \end{cases}$$ $\mapsto$ trovo $\frac{\partial U_z}{\partial z}$

elaborando t_{xx};

$$t_{xx}(z) = (\lambda+2\mu)\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} t_{zz} - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$= \underbrace{\left[\lambda+2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right]}_{\frac{2\mu}{1-\nu}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}}_{\frac{\nu}{1-\nu}} t_{zz}$$

definito $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\nu}{1-2\nu}$

quindi $t_{xx}(z) = \frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} t_{zz}$

→ la prima equazione del sistema integrata in $\hat{z}$

$$-\int_0^H \rho g \sin\psi \, dz + \int_0^H \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} dz + \int_0^H \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} dz = 0$$

$$\longrightarrow \quad \tau_0 = g\bar{\rho}\sin\psi H + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H t_{xx}\, dz = H\frac{\partial}{\partial x}\bar{t}_{xx}$$

allora si integra nell'altezza

$$\bar{t}_{xx} = \underbrace{\frac{1}{H}\int_0^H \frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\partial U_x}{\partial x} dz}_{\frac{1}{H}\underbrace{\frac{2\mu}{1-\nu}}_{E}\frac{\partial}{\partial x}(U_0(x)H)} + \underbrace{\frac{1}{H}\int_0^H \frac{\nu}{1-\nu} t_{zz}\, dz}_{\underbrace{-\frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho}(H) g \cos\psi \frac{H}{2}}_{P_0 \text{ pressione statica}}}$$

$$\bar{t}_{xx} = E\frac{\partial U_0(x)}{\partial x} H - P_0$$

quindi sostituendo all'equazione τ_0, si ha la differenziale nella velocità di II grado:

$$HE\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} = \bar{\rho} g H \sin\psi - \tau_0$$

per cui $\tau_0 = -\frac{\mu}{\delta} U_0 = -k U_0$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} = \bar{\rho} g \frac{\sin\psi}{E} + \frac{k U_0}{HE}$$

la soluzione è

$$U_0(x) = C \cdot \exp\left[-\sqrt{\frac{k}{HE}}\, x\right] - \frac{\rho g \sin\psi}{k} H$$

Condizione al contorno $(x=0, U_0=0)$

$$C = \frac{\bar{\rho} g \sin\psi}{k} H$$

$$\Rightarrow U_0(x) = -\frac{\bar{\rho} g \sin\psi H}{k}\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{HE}}\, x\right)\right]$$

Per la spinta, calcolo la tensione in $\hat{x}$.

$$\bar{t}_{xx}\Big|_{x=0} = E\frac{\partial U_0}{\partial x} - P_0$$ sulla parete del paravalanghe

mentre $$\frac{\partial U_0}{\partial x}\Big|_0 = -\frac{\bar{\rho} g \sin\psi}{k} H \sqrt{\frac{k}{HE}}$$

$$\Rightarrow \bar{t}_{xx}\Big|_0 = -HE\frac{\bar{\rho} g \sin\psi}{k}\sqrt{\frac{K}{EH}} - \frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho} g \cos\psi \frac{H}{2}$$

$$= -\bar{\rho} g \sin\psi H \sqrt{\frac{2}{1-\nu}\frac{\tilde{D}}{H}} - \frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho} g \cos\psi \frac{H}{2}$$

quindi la spinta è $S = \bar{t}_{xx}|_0 \cdot H$

$$S = -\bar{\rho} g \sin\psi H^2 \sqrt{\frac{2}{1-\nu}\frac{\tilde{D}}{H}} - \frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho} g \cos\psi \frac{H^2}{2}$$

(*) CON SLITTAMENTO + SCORRIMENTO con $\tau = -k' U(x)$

$$\cancel{S = H\,\bar{t}_{xx}|_0} \quad S = H\frac{\partial \bar{t}_{xx}}{\partial x} = H\bar{\rho} g \sin\psi - \tau_0'$$

$$\hookrightarrow U_0 = -\frac{\bar{\rho} g H \sin\psi}{k'}\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{k'}{HE}}\,x\right)\right]$$

quindi $$\bar{t}_{xx}\Big|_0 = -E\frac{\bar{\rho} g H \sin\psi}{k'} H \sqrt{\frac{k'}{HE}} - P_0$$

$$= -\bar{\rho} g \sin\psi \frac{H^2}{2} 2\sqrt{\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\tilde{D}}{H} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho} g \cos\psi \frac{H^2}{2}$$

la spinta risulta

$$S = -\bar{\rho} g \sin\psi \frac{H^2}{2} 2\sqrt{\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\tilde{D}}{H} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\nu}{1-\nu}\bar{\rho} g \cos\psi \frac{H^2}{2}$$

MODELLO PCM (Perla, Cheng, McClung)

APPROCCIO A CORPO RIGIDO → centro di massa $m(t)$ lungo la traiettoria $\vec{s}$ $\frac{D}{Dt}(M\vec{v}) = \sum \vec{F}_{est}$ [quantità di moto]

I termine: assumere $\frac{\partial}{\partial t} \ll \frac{\partial}{\partial s}$

$$U_s \frac{\partial}{\partial s}(M \cdot U_s) = U^2 \frac{\partial M}{\partial s} + M \frac{\partial U^2}{\partial s\, 2}$$

II termine: peso + resistenza moto + turbolenza + plugh

$$\vec{F}_{est} = Mg \sin\psi^{*} - Mg\cos\psi \tan\varphi - M\frac{U^2}{R}\tan\varphi - KU^2$$

$$\Rightarrow U^2\frac{\partial M}{\partial s} + M\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2}\right) = Mg\sin\psi - \left[Mg\cos\psi\tan\varphi + M\frac{U^2}{R}\tan\varphi + KU^2\right]$$

$$M\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2}\right) = Mg\left[\sin\psi - \cos\psi\tan\varphi\right] - U^2\left[\frac{\partial M}{\partial s} + \frac{M}{R}\tan\varphi + K\right]$$

forza di drag $D = \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{M}{R}\tan\varphi + K$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2}\right) = g\left[\sin\psi - \cos\psi\tan\varphi\right] - \frac{U^2 D}{M}$$

* si analizza ogni i-esimo tratto con

$$\alpha_i = g(\sin\psi_i - \cos\psi_i\tan\varphi_i)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U_i^2}{2}\right) = \alpha_i - \frac{U_i^2}{(M/D)_i}}$$

dove $\frac{M}{D}$ = parametro dell'i-esimo tratto

Sostituisco $Y_i = \frac{U_i^2}{2}$, ottengo $\frac{\partial}{\partial s}Y_i = \alpha_i - \frac{2Y_i}{(M/D)_i}$ eq. differenz. non omog.

→ soluz. omogenea

$Y_{i0} = Ce^{-\lambda_i s}$ quindi $-\lambda_i Ce^{-\lambda_i s} = -\frac{2}{(M/D)_i}Ce^{-\lambda_i s}$

allora $\lambda_i = \frac{2}{(M/D)_i}$

$$\rightarrow Y_{i0} = Ce^{-\frac{2}{(M/D)_i}s}$$

↦ soluzione particolare

$\rightsquigarrow Y_{ip} = \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i$

⇒ soluzione totale $\boxed{Y_i = Y_{io} + Y_{ip} = C e^{-\frac{2}{(M/D)_i} s} + \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i}$

con la variabile di velocità $Y_i = \frac{U_i^2}{2}$

$\frac{U_i^2}{2} = C e^{-\frac{2}{(M/D)_i} s} + \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i$ $\rightsquigarrow$ C si trova con la condizione al contorno

nel punto di partenza (A) $s=0$ con $U_{Ai}=0$ (immesso)

$$\frac{U_{Ai}^2}{2} = 0 = C e^{-\frac{2}{(M/D)_i} 0} + \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i = C + \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i$$

quindi $C = \frac{U_{Ai}^2}{2} - \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i$

$$\frac{U_i^2}{2} = \left[\frac{U_{Ai}^2}{2} - \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i\right] e^{-\frac{2}{(M/D)_i} s} + \frac{\alpha_i}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i$$

⇒ legge della velocità $\boxed{U_i(s) = \left[\left[U_{Ai}^2 - \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right] e^{-\frac{2}{(M/D)_i} s} + \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right]^{1/2}}$

ipotizzando un tratto i-esimo da A a B lungo L_i

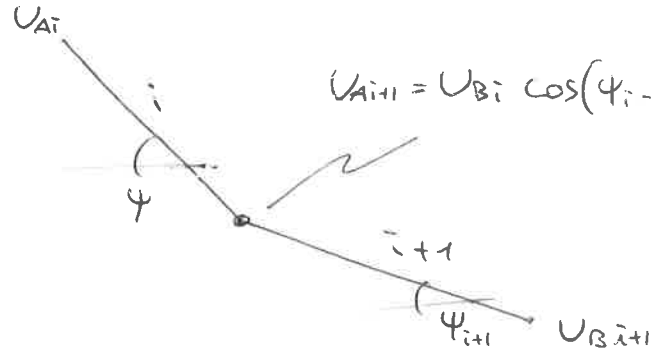
la velocità in B è $(s \to L_i)$

$$U_{Bi} = \left[\left[U_{Ai}^2 - \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right] e^{-\frac{2L_i}{(M/D)_i}} + \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right]^{1/2}$$

parametrizzando $\beta_i = -\frac{2L_i}{(M/D)_i}$ (esponente)

$$U_{Bi} = \left[U_{Ai}^2 e^{\beta_i} + \left(\frac{M}{D}\right)_i \alpha_i \left[1 - e^{\beta_i}\right]\right]^{1/2}$$

considerando due tratti consecutivi con diverse pendenza



$U_{A\,i+1} = U_{Bi} \cos(\varphi_i - \varphi_{i+1})$

PUNTO D'ARRESTO con $U_B = 0$, la velocità si riduce in maniera esponenziale $\sim e^{-\frac{2S}{(M/D)_i}}$

α_i unico parametro che cambia di segno $= g(\sin\varphi - \cos\varphi \tan\varphi)$

la condizione per $U_i = 0$ è $\alpha_i = 0 = g(\sin\varphi_i - \cos\varphi_i \tan\varphi_i)$

quindi $\sin\varphi_i = \cos\varphi_i \tan\varphi_i \rightarrow \boxed{\tan\varphi_i = \tan\varphi_i}$

imponendo $U(s) = 0$ si trova S di arresto

$$U_i(s) = 0 = \left[\left(U_{Ai}^2 - \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right)e^{-\frac{2}{(M/D)_i}S} + \left(\frac{M}{D}\right)_i\alpha_i\right]^{1/2}$$

$$\left(U_{Ai}^2 - \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i\right)e^{-\frac{2S}{(M/D)_i}} = -\left(\frac{M}{D}\right)_i\alpha_i$$

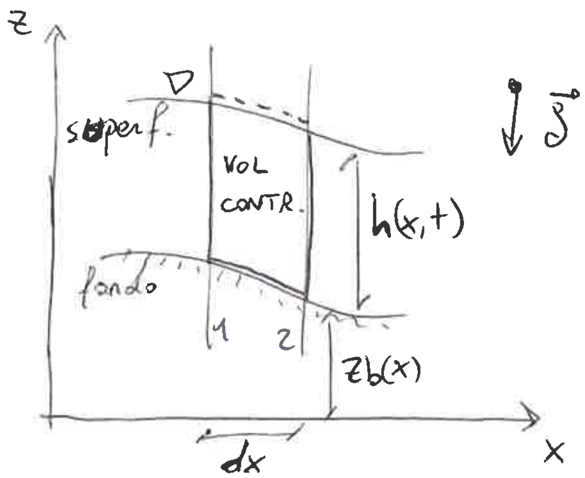
$$\frac{2S}{(M/D)_i} = -\ln\left[-\frac{(M/D)_i\alpha_i}{U_{Ai}^2 - \alpha_i\left(\frac{M}{D}\right)_i}\right]$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{D}\right)_i \ln\left[1 - \frac{U_{Ai}^2}{\left(\frac{M}{D}\right)_i\alpha_i}\right]}$$ punto di arresto nel tratto i

(sperimentalmente $10^2 < \frac{M}{D} < 10^4$)

MODELLO VÖLLMY

APPROCCIO A FLUIDO CONTINUO ⟶ visione euleriana



densità $\rho(x,z,t)$

velocità $\vec{v}(x,z,t) = \vec{U}_x + \vec{U}_z$

volume di controllo trasla verso $\hat{x}$ ed è mobile in $\hat{z}$ sulla superficie

⟶ ipotesi shallow flow con velocità mediata sulla verticale

Conservazione MASSA

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \, dV = 0$$

densità è media sulla verticale

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{\rho u}\, \rho U_x h)\right] dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{\rho u}\, \rho U_x h) = 0$$

Conservazione QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho' \vec{U}_x')\, dV = \sum \vec{F}_{est}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_x h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U_x U_x h \alpha_{\rho u^2})\right] dx = \sum \vec{F}_{est}\Big|_x$$

le forze esterne sono:

- peso volume
- pressione monte e valle
- tensione al fondo

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_x h) + \frac{\partial}{\partial x}(U_x^2 h) = g h \sin\psi - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{\rho} - \frac{\tau_0}{\rho}$$

Chiusura della tensione

$$\begin{cases} \tau_0 = \gamma h \cos\psi \tan\varphi + \dfrac{\gamma}{\xi} U^2 \\ \tau_0 = \gamma h \sin\psi \end{cases} \Longrightarrow \boxed{U = \sqrt{\xi h (\sin\psi - \cos\psi \tan\varphi)}}$$

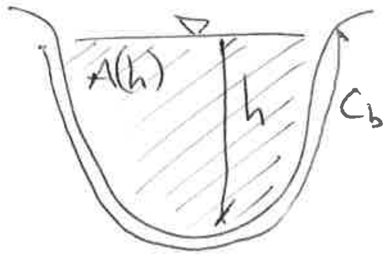
con ξ = coeff. correttivo di Chèzy

U dipende da h e dagli angoli ψ e φ.

Il torrente h dipende da h_0 (distacco) e dal tipo di neve

$$h \simeq 1 \div 5\, h_0$$

Per <u>valanga incanalata</u>, ipotesi del corso d'acqua



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 A) = \gamma A \sin\psi - \frac{\partial P}{\partial x} - \bar{\tau}_0 \cdot C_b$$

ipotesi di moto permanente uniforme

I relazione: $\quad 0 = \gamma A \sin\psi - \bar{\tau}_0 \cdot C_b$

II relazione: $\quad \bar{\tau}_0 = \dfrac{\gamma A \cos\psi}{C_b} \tan\varphi + \dfrac{\gamma}{\xi} U^2 \qquad \left(R_H = \dfrac{A}{C_b}\right)$

$$\Rightarrow \gamma R_H \cos\psi \tan\varphi + \frac{\gamma}{\xi} U^2 = \gamma R_H \sin\psi$$

quindi $\boxed{U = \sqrt{\xi R_H (\sin\psi - \cos\psi \tan\varphi)}}$

La condizione di arresto $U=0$ è $\quad \tan\psi = \tan\varphi$

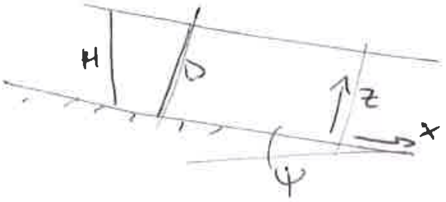
ed il coeff di Chèzy varia sperimentalmente

$$\xi \simeq 400 \div 1800 \ \frac{m}{s^2} \qquad \text{con } 20 < X < 42$$

MODELLO VÖLLMY-SALM

APPROCCI
- scorrimento A FLUIDO CONTINUO
- arresto A CORPO RIGIDO

• **tratto di innesco**



spessore neve $D = H\cos\psi \rightsquigarrow h_0^*$

con
$z = 2000\ m$
$\psi = 28°$

si fa riferimento alla neve caduta per 3 giorni consecutivi.

$h_0^* = \Delta H_{3gg} \cdot \cos(28°)$ quindi $\Delta H_{3gg} = f(\vec{x}, T_R)$

fattori:

- inclinazione pendio, maggiore $\psi \rightarrow$ minore h.

• $f_1(\psi) = \dfrac{0,291}{\sin\psi - 0,202 \cdot \cos\psi}$

- quota, maggiore $z \longrightarrow$ maggiore h.

$f_2(z) = 0,05\ \dfrac{(2000 - z)}{100}$

$\Rightarrow h_0 = \left(h_0^* + f_2(z)\right) f_1(\psi) + \delta_{wind} \cdot f_1(\psi)$ tirante iniziale del distacco

* valanghe di VERSANTE $\dfrac{B_0}{h_0} > 20$

$U_0 = \sqrt{\xi_0 h_0 (\sin\psi_0 - \cos\psi_0 \tan\varphi)} \longrightarrow Q_0 = h_0 U_0 B_0 = \text{costante}$

con $h_s = \dfrac{Q_0}{B_0 U_s}$ si ha $U_s = \left[\xi_s \dfrac{Q_0}{B_0 U_s}(\sin\psi_s - \cos\psi_s \tan\varphi)\right]^{1/2}$

$\Rightarrow U_s = \left[\xi_s \dfrac{Q_0}{B_0}(\sin\psi_s - \cos\psi_s \tan\varphi)\right]^{1/3}$

(nel tratto di scorrimento
con pedice "s")

* valanga INCANALATA $\quad \frac{B_0}{h_0} < 20$

$$U_0 = \sqrt{\xi_0 h_0 (\sin\Psi_0 - \cos\Psi_0 \tan\varphi)} \longrightarrow Q_0 = \frac{A_0 h_0 U_0}{L_0}$$

$\cancel{\text{con } h_s = \frac{Q_0}{B_0 U_s}}$ con $Q_0 = U_s A_s(h)$ sistema non-lineare

infatti: $R_H = \frac{A_s(h)}{C_b}$

$$U_s = \left[\xi_s R_H (\sin\Psi_s - \cos\Psi_s \tan\varphi)\right]^{1/2}$$

quindi in maniera implicita la portata è

$$Q_s = \left[\xi_s R_H(h)(\sin\Psi_s - \cos\Psi_s \tan\varphi)\right]^{1/2} A_s(h)$$

- $\boxed{\text{zona di arresto}}$

punto P di arresto con $\tan\Psi_P = \tan\varphi$ (da C a P)

a valle di P: $U = 0$ $\quad \Psi_P < \varphi$

a monte di P: tratto di controllo $\Psi_{CP} \geq \varphi + 4°$

CASO A: cresce molto $\Psi_{CP} \geq \varphi + 4°$

$$h_{CP} = \frac{Q_0}{U_{CP} B_0}$$

$$U_{CP} = \left[\xi_{CP} \frac{Q_0}{B_0} (\sin\Psi - \cos\Psi \tan\varphi)\right]^{1/3} \quad \text{di versante}$$

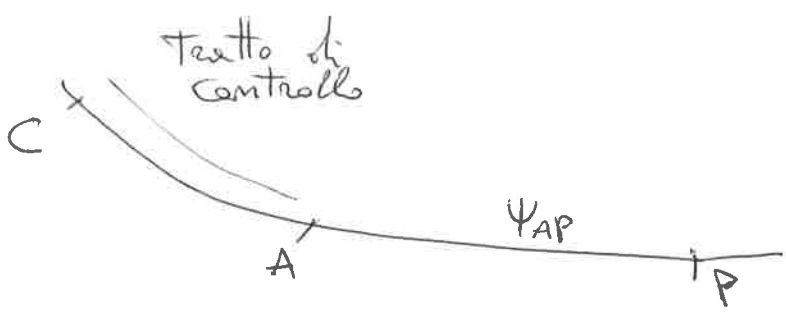
$$U_{CP} = \left[\xi_s R_H (\sin\Psi - \cos\Psi \tan\varphi)\right]^{1/2} \quad \text{incanalato}$$

$X_c = \overline{CP} = 0,7 \frac{\xi_{CP}}{\xi} h_{CP}$ distanza di arresto.

CASO B: cresce poco $\Psi_{CP} < \varphi + 4°$

individua A (a monte di P) tale che $\Psi_{AP} = \varphi + 3,5°$

individua C (a monte di A) con tratto di controllo $\overline{CA}$.



La distanza di arresto (entrambi i casi)

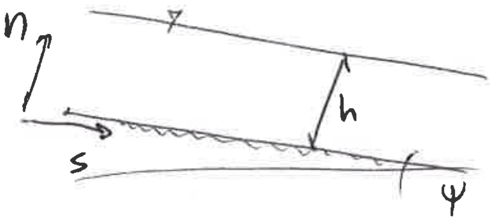
$$\bar{X} = \frac{h_d\,\xi}{2g} \ln\left[1 - \frac{U_{cp}^2}{U_{po}^2}\right] \qquad \text{con } h_d = h_{cp} + \frac{U_{cp}^2}{4 \cdot 2{,}5 \cdot g}$$

dato che a valle di P

$$U_{po}^2 = \left[\xi h_d \left(\sin\varphi_{po} - \cos\varphi_{po} \tan\varphi\right)\right] < 0$$

allora $\ln\left[1 - \frac{U_{cp}^2}{U_{po}^2}\right] > 0$

MODELLO AVAL-1D RAMMS 2D



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v h) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v h) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2 h) = -\frac{\partial P}{\partial s} + \rho g h \sin\psi - \tau_0 \\ \tau_0 = \rho g h \cos\psi \cdot \tan\varphi + \rho g \frac{v^2}{\xi} \end{cases}$$

spinta $P = \int_0^h t_{ss}\,dn = \int_0^h \Big(\rho g \cos\psi (h-n) \cdot \underbrace{\tan^2\left(45° \mp \frac{\varphi'}{2}\right)}_{\text{coeff. spinta attiva/passiva}}\Big) dn$

$$P = \rho g \cos\psi \cdot k_{a,p} \frac{h^2}{2}$$

equazione bilancio del moto

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v h) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho v^2 h + \rho g \cdot k_{a,p} \cos\psi \frac{h^2}{2}\right) = \rho g \left[h \sin\psi - h\cos\psi \tan\varphi + \frac{v^2}{\xi}\right]$$

diviso ρ = costante

$$\frac{\partial}{\partial t}(v h) + \frac{\partial}{\partial s}\left(v^2 h + g \cdot k_{a,p} \cos\psi \frac{h^2}{2}\right) = g \left[h \sin\psi - h\cos\psi \tan\varphi + \frac{v^2}{\xi}\right]$$

$\longrightarrow$ Forma matriciale bilanci

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} h \\ vh \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} vh \\ v^2 h + g\, k_{a,p} \cos\psi \frac{h^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ g\left[h(\sin\psi - \cos\psi \tan\varphi) + \frac{v^2}{\xi}\right] \end{vmatrix}$$

$\longrightarrow$ Forma vettoriale

Forma quasi lineare omogenea

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial s} f = S \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial F}{\partial U}}}_{\text{matrice Jacobiana}} \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

forma indiciale
$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial s} + \frac{\partial F_1}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial s} + \frac{\partial F_2}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

se $U = \begin{vmatrix} h \\ vh \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix}$ allora $f = \begin{vmatrix} vh \\ v^2 h + g\, k_{a,p} \cos\psi \frac{h^2}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_2 \\ \frac{U_2^2}{U_1} + g\, k_{a,p} \cos\psi \frac{U_1^2}{2} \end{vmatrix}$

quindi $\dfrac{\partial F}{\partial U} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial U_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial U_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial U_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial U_2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{U_2^2}{U_1} + g\,l_{a,p}\cos\psi\, U_1 & 2\dfrac{U_2}{U_1} \end{bmatrix}$

Per trovare le caratteristiche si applica $\det\left[\dfrac{\partial F}{\partial U} - \lambda I\right] = 0$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{U_2^2}{U_1} + g\,l_{a,p}\cos\psi\, U_1 & 2\dfrac{U_2}{U_1} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ polinomio $\quad -\lambda\left(2\dfrac{U_2}{U_1} - \lambda\right) - \left(g\,l_{a,p}\cos\psi\, U_1 - \dfrac{U_2^2}{U_1}\right) = 0$

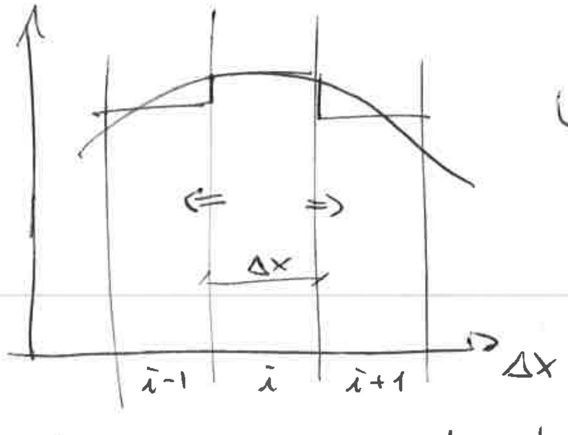
ritornando alle variabili primitive con v, h si ha

$$\lambda^2 - 2v\lambda - g\,l_{a,p}\cos\psi\, h + v^2 = 0$$

soluzioni $\quad \lambda_{1,2} = v \pm \sqrt{g\,l_{a,p}\cos\psi\, h}\quad$ sono le caratteristiche del moto

$\Rightarrow$ <u>METODO DI GODUNOV</u> con problema di Riemann

integrazione numerica per la discretizzazione in Δx

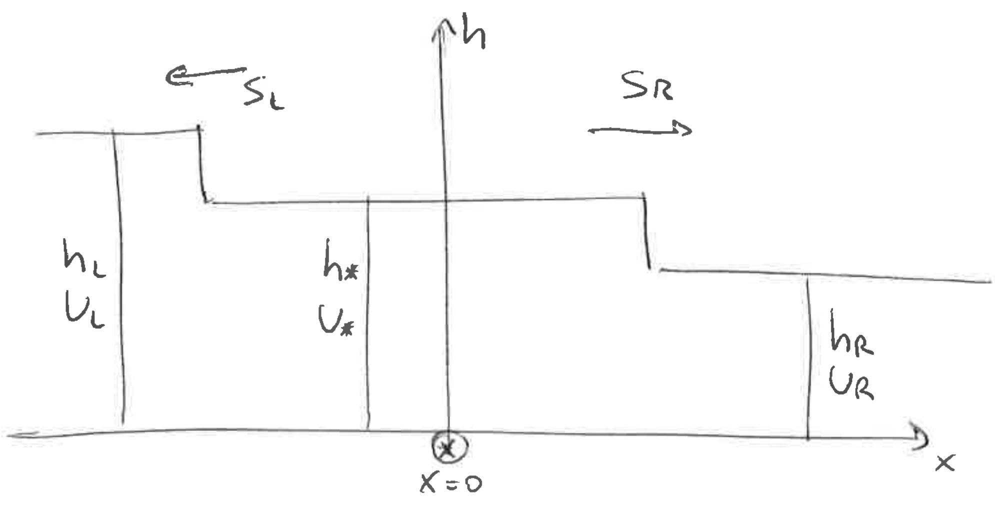


metodo ai volumi finiti con soluzione

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \left[F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-1/2}^n\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} + S^n \Delta t$$

$\Rightarrow$ calcolo dei flussi F_i^n alla transizione del Δx (uniche incognite).

<u>ipotesi</u>: 2 onde ~~di~~ shock contrarie con solutore HLL.



Nell'origine ⊛ si ha sempre la soluzione costante

noti: U_R, U_L, F_L, F_R ; incognite: U_*, F_*, S_L, S_R

si applicano 2 bilanci per onda (= 4 equazioni)

$$\begin{cases} F_* - F_L = S_L (U_* - U_L) & \text{2 equazioni Rankine} \\ F_R - F_* = S_R (U_R - U_*) & \text{2 equazioni Rankine} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ stima di S_L e S_R con autovalori $\lambda_{1,2} = U \pm \sqrt{gh\cos\psi}$

quindi $\begin{cases} \lambda^L_{1,2} = U_L \pm \sqrt{gh_L \cos\psi} \\ \lambda^R_{1,2} = U_R \pm \sqrt{gh_R \cos\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_L = \min(\lambda^L_1, \lambda^R_1) & \text{lente} \\ S_R = \max(\lambda^L_2, \lambda^R_2) & \text{veloci} \end{cases}$

↳ si trova $U_* = U_R - \dfrac{F_R - F_*}{S_R}$ nell'onda di destra

nell'onda di sinistra ~~$F_* - F_L = S_L U_R - \frac{S_L}{S_R}(F_R) - S_L U_L$~~

$$F_* - F_L = S_L U_R - \frac{S_L}{S_R}(F_R - F_*) - S_L U_L$$

$$\Rightarrow F_* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad \text{se } \begin{cases} S_L < 0 \\ S_R > 0 \end{cases}$$

ma $\begin{cases} \text{se } S_L, S_R > 0 & F^{HLL} \to F_L \\ \text{se } S_L, S_R < 0 & F^{HLL} \to F_R \end{cases}$

Il flusso è $F^{HLL} \begin{cases} F_* & \text{se } S_L < 0 \text{ e } S_R > 0 \\ F_L & \text{se } S_L, S_R > 0 \\ F_R & \text{se } S_L, S_R < 0 \end{cases}$

e la soluzione del problema di Riemann trova

$$\boxed{U_i^{n+1} = U_i^n - \left(F^{HLL}_{i+\frac{1}{2}} - F^{HLL}_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta x}{\Delta t} + S\Delta t}$$